



# Resolução numérica de equações diferenciais parciais fracionárias usando o método pseudo-espectral de Legendre e o método de Adams

Numerical resolution of fractional partial differential equations using the Legendre's pseudo-spectral method and the Adams method

W. J. Lima<sup>1</sup>; F. S. Lobato<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal do Norte de Minas Gerais, 39270-000, Pirapora, MG, Brasil

<sup>2</sup>Universidade Federal de Uberlândia, 38400-902, Uberlândia, MG, Brasil

\*fslobato@ufu.br

(Recebido em 26 de abril de 2024; aceito em 25 de setembro de 2024)

O estudo de equações diferenciais parciais fracionárias configura-se como um tema de grande importância em diferentes áreas da ciência e engenharia. Isto se deve ao grande número de aplicações que podem ser desenvolvidas a partir deste tipo de modelo. Do ponto de vista matemático, a ordem fracionária que caracteriza cada contribuição diferencial pode ser interpretada como um parâmetro adicional e que pode ser ajustado para uma dada aplicação. Resolver analiticamente ou numericamente tais modelos fracionários representa uma tarefa complexa, visto que a grande maioria dos modelos são inerentemente não lineares. Neste contexto, o presente trabalho tem por objetivo estender o método pseudo-espectral de Legendre para o contexto fracionário. Além disso, combinar a abordagem proposta com o tradicional Método de Adams fracionário. A primeira abordagem é empregada para transformar o modelo original em um conjunto de equações diferenciais ordinárias fracionárias no tempo, sendo o mesmo integrado considerando o Método de Adams fracionário. Para avaliar a metodologia proposta, alguns estudos de caso são resolvidos e os resultados numéricos são comparados com as soluções analíticas. Os resultados obtidos demonstram que a metodologia proposta se configura como uma interessante estratégia para resolver este tipo de problema. Palavras-chave: equações diferenciais parciais fracionárias, método pseudo-espectral de Legendre, método de Adams fracionário.

The study of fractional partial differential equations is a topic of great importance in various areas of science and engineering. This is due to wide range of applications that can be developed based on this type of model. From a mathematical perspective, the fractional order characterizing each differential contribution can be interpreted as an additional parameter that can be adjusted for a given application. Solving such fractional models analytically or numerically fractional models constitutes a complex task, as the majority of models are inherently non-linear. In this context, the present work aims to extend the Legendre pseudo-spectral method to fractional context. Furthermore, to associate the proposed approach to traditional fractional Adams Method. The first approach is employed to transform the original model into a set of time-fractional ordinary differential equations, which are integrated considering the fractional Adams Method. To evaluate the proposed methodology, some case studies are solved and its numerical results are compared with analytical solutions. The results obtained demonstrate that the proposed methodology is an interesting strategy to solve this type of problem.

Keywords: fractional partial differential equations, Legendre' pseudo-spectral method, fractional Adams method.

## 1. INTRODUÇÃO

Os diferentes fenômenos observados na natureza podem ser representados por equações diferenciais com diferentes níveis de complexidade. Nas últimas décadas, o uso de modelos diferenciais que apresentam ordem fracionária tem contribuído significativamente para uma melhor representação destes modelos em relação à pontos experimentais [1]. Do ponto de vista matemático, resolver um modelo diferencial fracionário configura uma tarefa árdua, visto que a presença de uma ordem fracionária representa uma dificuldade adicional [2]. Por outro lado, modelos diferenciais fracionários tornam possível a interpretação física do fenômeno em análise a partir da influência da ordem fracionária no comportamento do sistema de interesse [3, 4].

O cálculo com ordem fracionária é uma extensão do tradicional cálculo com ordem inteira e data no final do século XVII, motivado pela troca de correspondências entre Leibniz e L'Hôpital. A questão central levantada por estes matemáticos trata da generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária [5, 6]. Desde então, inúmeras estratégias para a generalização de derivadas fracionárias têm sido propostas. Dentre as mais usuais pode-se citar as aproximações de Riemann–Liouville, Grünwald–Letnikow, Caputo e Abordagem de Funções Generalizadas [7]. A derivada fracionária de Riemann–Liouville é muito empregada no campo da matemática. Todavia, esta abordagem não é indicada para problemas físicos visto que a mesma requer a definição de condições iniciais representadas por contribuições fracionárias, cuja explicação física ainda é pouco explorada. Para superar tal dificuldade, Caputo introduziu uma definição alternativa, que tem a vantagem de definir condições iniciais de ordem inteira para equações diferenciais com ordem fracionária [8]. Ao contrário da abordagem de Riemann–Liouville, a formulação de Grünwald–Letnikow propõe uma aproximação numérica para aproximar derivadas fracionárias [7]. Além disso, os operadores fracionários podem ser interpretados como operadores que representam efeitos de memória [1]. Neste caso, uma integral com ordem inteira pode ser representada por uma soma ponderada com pesos idênticos ao longo do domínio de integração. Por outro lado, uma integral fracionária também pode ser representada por uma soma ponderada, todavia, com a importância relativa dos pesos sendo reduzida com o passar do tempo [7, 9].

Nas últimas décadas, inúmeras aplicações considerando o contexto fracionário podem ser encontradas, dentre as quais pode-se citar estudos de caso em: problema de advecção-dispersão fracionária direta e inversa [2], integração do modelo massa-mola-amortecedor usando derivada de Caputo e colocação ortogonal [3], problemas de valor no contorno [4], química [10], finanças [11], hidrologia [12], biologia [13], viscoelasticidade [14], problemas de advecção-dispersão [15], sincronização do caos [16], robótica [17], difusão anômala [18], equação fracionária de Boussinesq [19], equação de difusão [20], equação de advecção-dispersão anômala [21], equação de difusão anômala [22], problemas de controle ótimo [23], problemas de transferência de massa anômala usando um modelo hiperbólico-fracionário [24], entre outros.

Apesar da inerente dificuldade em se resolver uma equação diferencial fracionária analiticamente, algumas abordagens para problemas particulares podem ser encontradas. Neste contexto pode-se citar o Método de Decomposição Adomiana [25], o Método da Transformada Diferencial Fracionária [26], o Método da Iteração Variacional [27], o Método da Matriz Operacional [28], o Método de Análise Homotópica [29] e o tradicional Método da Transformada de Laplace [1, 30]. Por outro lado, como alternativa as abordagens analíticas, métodos numéricos têm sido empregados para resolver equações diferenciais fracionárias mais gerais. Dentre estes pode-se citar o Método Preditor-Corretor Fracionário [31, 32], o uso de fórmulas de diferenciação com múltiplos passos [33], o Método das Diferenças Finitas no contexto fracionário [34], o Método Adams Implícito [35], e o Método de Adams-Bashforth associado com o espaço de Laplace [36].

Como descrito, o estudo envolvendo equações diferenciais parciais nos cursos de ciências exatas é muito importante para a compreensão dos estudantes no que tange os fenômenos físicos observados na natureza. Além disso, o domínio em equações diferenciais parciais prepara os estudantes para a aplicação de princípios físicos em outras áreas do conhecimento, bem como promove a interdisciplinaridade, que é essencial para a resolução e interpretação de problemas realísticos. Cabe enfatizar que muitos fenômenos físicos, como os citados anteriormente, não podem ser completamente descritos por equações diferenciais com ordem inteira, destacando assim a importância no estudo de modelos fracionários.

Diante do que foi apresentado, a presente contribuição tem por objetivo propor uma metodologia sistemática para a resolução de uma Equação Diferencial Parcial Fracionária (EDPF). A referida abordagem numérica consiste da associação entre o Método Pseudo-Espectral de Legendre (MPEL) estendido para o contexto fracionário e o tradicional Método de Adams Fracionário (MAF). Para validar a metodologia proposta são apresentados quatro estudos de caso com diferentes níveis de complexidade e que apresentam solução analítica conhecida.

## 2. CONCEITOS

Nesta seção são apresentadas algumas aproximações e conceitos empregados para a avaliação de derivadas fracionárias [7, 37-40].

### 2.1 Definição 1

A integral fracionária do tipo Riemann-Liouville ( $I^\mu f(t)$ ) com ordem fracionária  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) aplicada a uma função  $f$  no domínio  $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como:

$$I^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu-1} f(\tau) d\tau \tag{1}$$

onde  $\Gamma$  é a função Gama.

### 2.2 Definição 2

A derivada fracionária do tipo Riemann-Liouville ( $D^\mu f(t)$ ) de ordem  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) aplicada a uma função  $f$  no domínio  $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como:

$$D^\mu f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\mu-1} f(\tau) d\tau \tag{2}$$

onde  $n = [\mu] + 1$  e  $[\mu]$  é um operador que representa a parte inteira de  $\mu$ .

### 2.3 Definição 3

A derivada fracionária do tipo Caputo ( $D^\mu f(t)$ ) de ordem  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) aplicada em uma função  $f$  no domínio  $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como:

$$D^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\mu-1} f^n(\tau) d\tau \tag{3}$$

onde  $n = [\mu] + 1$  e  $[\mu]$  é um operador que representa a parte inteira de  $\mu$ .

### 2.4 Definição 4

A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov ( $D^\mu f(t)$ ) de ordem  $\mu$  ( $1 < \mu < 2$ ) aplicada a uma função  $f$  no domínio  $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como:

$$D^\mu f(t) = \frac{1}{h^\mu} \sum_{k=0}^M \left( (-1)^k \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\mu-k+1)} \right) f(t-(k-1)h) \tag{4}$$

onde  $M$  é o número de pontos de discretização e  $h = (t_f - t_0)/M$  é a etapa de integração ( $t_0$  e  $t_f$  representam os tempos inicial e final, respectivamente).

### 2.5 Definição 5

Se  $f$  é uma função contínua com ordem fracionária igual a  $k\mu$  (onde  $k$  é um número inteiro positivo e  $1 < \mu < 2$ ), a expansão fracionária da Série de Taylor para esta função é escrita da seguinte forma:

$$f(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{h^{k\mu}}{\Gamma(1+k\mu)} \right) f^{k\mu}(t) \tag{5}$$

### 2.6 Definição 6

A Função de Mittag-Leffler é uma relação de uma variável complexa e que depende do parâmetro complexo  $\mu_1$  (onde a parte real de  $\mu_1$  deve ser maior do que zero). Matematicamente, a Função de Mittag-Leffler para um parâmetro é definida como [7]:

$$E_{\mu_1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\mu_1 k + 1)} \tag{6}$$

em que  $E_{\mu_1}(t)$  Função de Mittag-Leffler do parâmetro  $\mu_1$  e da variável independente  $t$ .

Para o caso particular em que  $\mu_1$  é igual a unidade, tem-se:

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t) \tag{7}$$

Por este motivo a Função de Mittag-Leffler é conhecida, para este caso particular, como a função exponencial.

### 2.7 Definição 7

A Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é uma relação de uma variável complexa e que depende de dois parâmetros complexos, a saber,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  (onde a parte real de ambos os parâmetros devem ser maiores do que zero). Matematicamente, esta é definida como [7]:

$$E_{\mu_1, \mu_2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\mu_1 k + \mu_2)} \tag{8}$$

em que  $E_{\mu_1, \mu_2}(t)$  é a Função de Mittag-Leffler dos parâmetros  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , e da variável independente  $t$ . Se  $\mu_2$  for igual a unidade,  $E_{\mu_1, \mu_2}(t)$  reduz-se a Função de Mittag-Leffler com um único parâmetro.

## 3. O PROBLEMA DE INTERESSE

Na presente contribuição deseja-se resolver uma Equação Diferencial Parcial Fracionária (EDPF) transiente e uni-dimensional definida como:

$$A_1(x,t) \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \varphi(x,t) = A_2(x,t) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \varphi(x,t) + A_3(x,t) \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} \varphi(x,t) + A_4(x,t, \varphi) \tag{9}$$

$$\varphi(x,0) = g_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_f \tag{10}$$

$$\varphi(x, t_f) = g_2(x), \quad 0 \leq x \leq x_f \tag{11}$$

$$B_1 \varphi(0,t) + B_2 \frac{\partial}{\partial x} \varphi(0,t) = B_3(t), \quad t > 0 \tag{12}$$

$$B_4 \varphi(x_f,t) + B_5 \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_f,t) = B_6(t), \quad t > 0 \tag{13}$$

em que  $t$  é o tempo ( $t_f$  é o tempo final),  $x$  é a coordenada espacial ( $x_f$  é o comprimento máximo),  $\varphi$  é a variável dependente,  $A_i(x,t)$  ( $i=1, \dots, 3$ ) são constantes ou funções das variáveis independentes que ponderam cada uma das contribuições na referida EDPF e  $A_4(x,t, \varphi)$  é uma função das variáveis dependentes e independentes.  $B_j$  ( $j=1, 2, 4, 5$ ) são constantes que definem o tipo de condição de contorno na EDPF e  $B_k$  ( $k=3, 6$ ) são funções do tempo.  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ) e  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) representam as ordens fracionárias referentes as contribuições temporal e espacial, respectivamente. Além do mais,  $g_1(x)$  e  $g_2(x)$  são funções que definem as condições para diferentes instantes de tempo. Cabe enfatizar que, se  $2\gamma$  for menor ou igual que a unidade, somente

é necessário definir a função  $g_1(x)$  para a integração do modelo diferencial fracionário. Por outro lado, se  $2\gamma$  for maior que a unidade, faz-se necessário também definir a função  $g_2(x)$ .

#### 4. METODOLOGIA

Conforme descrito anteriormente, para a resolver a EDPF definida pelas Eqs. (9)-(13), considera-se a combinação entre o Método Pseudo-Espectral de Legendre Fracionário (MPELF) e o Método de Adams Fracionário (MAF). A aplicação da primeira abordagem numérica resulta na transformação da EDPF em um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Fracionárias (EDOF) no tempo. O sistema diferencial fracionário resultante é resolvido considerando o tradicional Método de Adams Fracionário (MAF). A Figura 1 apresenta o fluxograma ilustrativo da metodologia proposta.

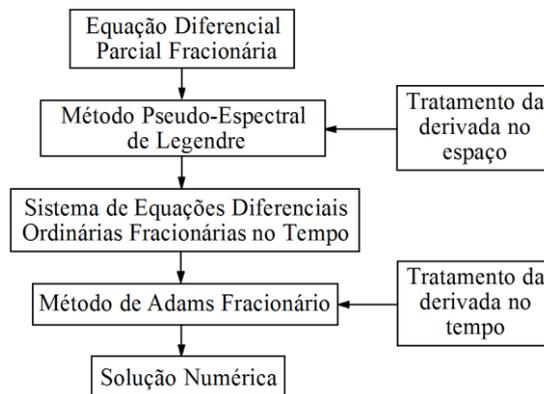


Figura 1: Representação esquemática da associação entre o Método Pseudo-Espectral Fracionário e o Método de Adams Fracionário.

#### 4.1 Método Pseudo-Espectral de Legendre

##### 4.1.1 Ordem Diferencial Inteira

O Método Pseudo-Espectral de Legendre (MPEL) é uma estratégia numérica empregada para a resolução de problemas de valor de contorno com ordens inteiras. De forma geral, esta é fundamentada no uso de uma função de aproximação (geralmente o polinômio de Lagrange (PL)). Este é escolhido pela facilidade de obtenção de derivadas em comparação com outros tipos de aproximações [41, 42]. Em seguida, avalia-se a solução numérica considerando um dado número de pontos de colocação ( $NPC$ ) [41]. No mínimo, a função de aproximação deve ser satisfeita nos pontos de colocação, bem como nas condições iniciais e de contorno.

Considerando um conjunto de pontos de discretização  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{NPC+1}, Y_{NPC+1})$ , pode-se interpolar uma função que passa por estes pontos como:

$$Y_{NPC}(X) = \sum_{i=1}^{NPC+1} Y_i l_i(X) \tag{14}$$

em que  $l_i(X)$  é o polinômio de interpolação de Lagrange definido como:

$$l_i(X) = \prod_{j=1, j \neq i}^{NPC+1} \frac{X - X_j}{X_i - X_j} \tag{15}$$

Se o subscrito  $i$  é igual a  $j$ ,  $l_i(X)$  é igual a 1. Caso contrário,  $l_i(X)$  é igual a 0. Pelo fato desta função ser contínua e diferenciável, as derivadas primeira e segunda para uma raiz  $X_j$  podem ser expressas como:

$$\frac{dY_{NPC}(X_j)}{dX} = \sum_{i=1}^{NPC+1} Y_i \frac{dl_i(X_j)}{dX}, \quad j=1, \dots, NPC+1 \quad (16)$$

$$\frac{d^2Y_{NPC}(X_j)}{dX^2} = \sum_{i=1}^{NPC+1} Y_i \frac{d^2l_i(X_j)}{dX^2}, \quad j=1, \dots, NPC+1 \quad (17)$$

Como o problema original possui duas variáveis independentes, a aproximação polinomial para a variável dependente pode ser definida como:

$$\sum_{i=1}^{NPC+1} l_i(x)\phi_i(t) \quad (18)$$

em que  $\phi_i$  ( $i=1, \dots, NPC+1$ ) são os coeficientes que devem ser encontrados.

Ao substituir tais aproximações no modelo diferencial original para cada ponto de colocação obtêm-se os resíduos e estes devem ser minimizados. Neste caso, para cada  $i$ -ésima raiz, uma equação diferencial em relação a  $\phi$  é encontrada. Por fim, o sistema de equações diferenciais ordinárias em relação ao tempo e que apresenta ordem inteira deve ser resolvido.

A questão que surge agora é como computar os pontos de colocação onde as referidas equações diferenciais ordinárias serão avaliadas. Estes devem ser determinados a partir do tipo de função ortogonal empregada [41, 42]. Em se tratando da aproximação espectral de Legendre, considere  $L_N(\eta)$  como sendo o polinômio de Legendre de  $N$ -ésima ordem em função da variável independente  $\eta$ . Este é definido segundo Becerra e Galvão (2010) [43]:

$$L_N(\eta) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N(\eta^2 - 1)^N}{d\eta^N} \quad (19)$$

Ao se definir a ordem  $N$ , tem-se a aproximação polinomial de Legendre. Por exemplo, os polinômios para  $N$  iguais a 0, 1, 2 e 3 são descritos, respectivamente, como:

$$L_0(\eta) = 1 \quad (20)$$

$$L_1(\eta) = \eta \quad (21)$$

$$L_2(\eta) = \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1) \quad (22)$$

$$L_3(\eta) = \frac{1}{2}(5\eta^3 - 3\eta) \quad (23)$$

Assim, os pontos de colocação de Legendre associados ao polinômio  $L_N(\eta)$  são definidos no intervalo  $[-1 \ \eta_i \ 1]$  ( $i=1, 2, \dots, N-1$ ), em que  $\eta_i$  correspondem às raízes da derivada de  $L_N(\eta)$  com relação a  $\eta$ .

É importante ressaltar que a principal vantagem desta abordagem é a redução do erro quando comparado com estratégias que consideram pontos de colocação igualmente espaçados [41, 42].

Em resumo, o MPEL empregado para resolver equações diferenciais de ordem inteira pode ser resumido conforme Villadsen e Stewart (1967) [41] e Villadsen e Michelsen (1978) [42]:

- Definir os parâmetros de entrada: características do modelo matemático em análise, condições iniciais e de contorno, ordem ( $N=NPC$ ) da aproximação e o polinômio ortogonal usado para gerar os pontos de colocação;
- Calcular os pontos de colocação (raízes do polinômio ortogonal);
- Gerar o polinômio de Lagrange considerando os pontos de colocação (o número de coeficientes desconhecidos é reduzido considerando a avaliação das condições iniciais e de contorno);
- O modelo resultante (resíduo) é resolvido usando uma estratégia numérica particular;
- Verificar se a solução obtida é sensível com relação ao aumento do grau de aproximação.

#### 4.1.2 Ordem Diferencial Fracionária

Na seção anterior, o MPEL empregado para resolver equações diferenciais de ordens inteira foi revisitado. Para estender a metodologia apresentada para o contexto fracionário é necessário avaliar as contribuições fracionárias no tempo e no espaço. Em relação ao espaço, qualquer uma das definições apresentadas na seção 2 podem ser empregadas. Todavia, como a aproximação considerada é um polinômio, pode-se usar a definição proposta por Lacroix para a derivada fracionária de um polinômio [7]:

$$\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha)} X^{i-\alpha-1} \tag{24}$$

em que  $i$  é um contador pertencente ao intervalo  $[0 \text{ NPC}+1]$ ,  $X$  é a variável independente e  $\alpha$  é a ordem fracionária.

Neste caso, considerando esta definição pode-se avaliar, facilmente, as derivadas fracionárias com relação ao espaço. Como consequência, o modelo diferencial parcial fracionário é convertido em um sistema de equações diferenciais ordinárias fracionárias no tempo avaliado em cada ponto de colocação, conforme o modelo a seguir:

$$D_t^{2\gamma} y_i(t) = f_i(t, \alpha, y_1(t), \dots, y_{NPC}(t)), \quad y_i(0) = y_{i0} \tag{25}$$

em que  $t$  é o tempo,  $y_i$  é a  $i$ -ésima variável dependente,  $f_i$  é o  $i$ -ésimo lado direito do modelo diferencial fracionário ordinário e  $y_{i0}$  é a  $i$ -ésima condição inicial. É importante destacar que se  $\gamma$  for maior do que  $1/2$ , o modelo acima é ordem superior a unidade com relação ao tempo.

Para resolver o sistema de equações diferenciais fracionárias apresentado considera-se o Método Generalizado de Adams–Bashforth–Moulton ou simplesmente Método de Adams Fracionário (MAF) [44]. Este consiste em duas etapas. Na primeira o valor da variável dependente  $y_{k+1}^p$  no  $k+1$ -ésimo ponto de discretização é estimado considerando a Eq.(26). Em seguida, este valor é atualizado considerando a Eq.(27).

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^j + \frac{h^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \tag{26}$$

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^j + \frac{h^\gamma}{\Gamma(\gamma+2)} \left( \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right) \tag{27}$$

em que  $h$  é o tamanho do passo de integração (os pontos de discretização são considerados igualmente espaçados), e  $a$  e  $b$  são coeficientes dados como:

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\gamma+1} - (k-\gamma)(k+1)^\gamma, & j=0 \\ (k-j+2)^{\gamma+1} - 2(k-j+1)^{\gamma+1} + (k-j)^{\gamma+1} & 1 \leq j \leq k, \\ 1, & j=k+1 \end{cases} \tag{28}$$

$$b_{j,k+1} = (k-j+1)^\gamma - (k-j)^\gamma \tag{29}$$

As etapas básicas para o Método Pseudo-Espectral de Legendre Fracionário (MPELF) são descritas a seguir:

- Definir os parâmetros de entrada: modelagem matemática do problema de interesse (ordem fracionária, parâmetros do modelo, condições iniciais e de contorno), ordem ( $NPC$ ) de aproximação (o polinômio tem coeficientes  $NPC+1$ ) e polinômio usado para gerar os pontos de colocação e número de pontos de discretização ( $M$ ) no MAF;
- Calcular os pontos de colocação (raízes do polinômio ortogonal);
- Gerar o polinômio de Lagrange considerando os pontos de colocação determinados no passo anterior;
- Substituir a função de aproximação considerando a contribuição fracionária no modelo original, bem como avaliar a mesma usando os pontos de colocação computados;

- O modelo resultante (equação residual) é resolvido usando o MAF;
- Verificar a sensibilidade da solução com relação a mudança nos valores de  $NPC$  e de  $M$ .

É importante ressaltar que a modificação no MPEL original permite a resolução de equação diferencial parcial fracionária no espaço (ou com ordem inteira se assim for desejado). Neste contexto, as principais características do método original (com ordem inteira) são preservadas. Cabe destacar que, para o polinômio considerado para gerar os pontos de colocação, o domínio para a variável independente é  $[-1, 1]$ . Neste caso, para aplicações que não sejam definidas nesta faixa, deve-se realizar uma mudança de variável para adequar ao referido domínio.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A presente seção tem por objetivo avaliar a qualidade da solução obtida pela metodologia proposta (associação entre o MPELF e o MAF) para a resolução de uma EDPF. Para essa finalidade os seguintes pontos devem ser destacados:

- Quatro estudos de caso matemáticos com diferentes níveis de complexidade e que apresentam soluções analíticas conhecidas são considerados para fins de verificação da metodologia proposta;
- Em cada aplicação, o número de pontos de colocação ( $NPC$ ) no domínio do espaço requeridos pelo MPELF foram variados para avaliar a sua influência nos resultados obtidos. Já no MAF, sempre foram considerados 100 ( $M$ ) pontos igualmente espaçados no domínio do tempo. Este valor foi encontrado após simulações preliminares, em que foi verificado que o aumento deste parâmetro não afetava, significativamente, os perfis obtidos;
- Para mensurar a qualidade da solução obtida, as seguintes métricas são consideradas:

1. Erro absoluto Médio ( $L_2$ ):

$$L_2 = \left( \frac{1}{NPC} \sum_{i=1}^{NPC} \sum_{j=1}^M (Y_{i,j}^a - Y_{i,j}^n)^2 \right)^{0,5} \quad (30)$$

em que  $Y_{i,j}^a$  e  $Y_{i,j}^n$  representam as soluções analítica e numérica avaliadas no ponto  $(i,j)$ , respectivamente.

2. Erro Absoluto Máximo ( $L_\infty$ ):

$$L_\infty = \max_{1 \leq i \leq NPC, 1 \leq j \leq M} |Y_{i,j}^a - Y_{i,j}^n| \quad (31)$$

- O tempo de processamento (TP) é calculado utilizando um computador Desktop Intel Core i7-4770 com 8GB de memória;
- Todas as rotinas numéricas foram implementadas considerando o *software* Scilab® (versão 6.6.1).

### 5.1 Estudo de Caso 1

A primeira aplicação considera uma EDPF no tempo com os seguintes parâmetros:  $2\gamma=[0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9]$ ,  $\alpha=1$ ,  $x_f=t_f=1$ ,  $A_1(x,t)=1$ ,  $A_2(x,t)=-x$ ,  $A_3(x,t)=-1$ ,  $B_1=B_4=1$  e  $B_2=B_5=0$  [45]. Já as funções  $g_1(x)$ ,  $A_4(x,t,\varphi)$ ,  $B_3(t)$  e  $B_6(t)$  são definidas como:

$$g_1(x) = x^2 \quad (32)$$

$$A_4(x,t,\varphi) = 2x^2 + 2t^\gamma + 2 \quad (33)$$

$$B_3(t) = \frac{2\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2\gamma+1)} t^{2\gamma} \quad (34)$$

$$B_6(t) = 1 + \frac{2\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(2\gamma + 1)} t^{2\gamma} \tag{35}$$

A solução analítica é descrita segundo Entezari et al. (2019) [45] como:

$$\varphi(x,t) = x^2 + \frac{2\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(2\gamma + 1)} t^{2\gamma} \tag{36}$$

Conforme mencionado anteriormente, como o valor de  $2\gamma$  é menor que a unidade, não é necessário definir uma condição adicional ( $g_2(x)$ ), em relação ao tempo, para que o modelo diferencial fracionário possa ser integrado.

Na Tabela 1 são apresentados o Erro Absoluto Máximo considerando a metodologia proposta (para diferentes números de pontos de colocação - *NPC*), bem como os tempos de processamentos. Além disso, para fins de comparação são apresentados os resultados obtidos considerando, o Método Wavelet de Bernstein Normalizado (*NPC*=6) [45], o Método de colocação Sinc-Legendre (*NPC*=25) [46] e o Método de Wavelet (*NPC*=64) [47].

Tabela 1: Erro Absoluto Máximo considerando diferentes estratégias para o estudo de caso 1 ( $2\gamma=0,5$  e  $t=0,5$ ). TP é o tempo de processamento.

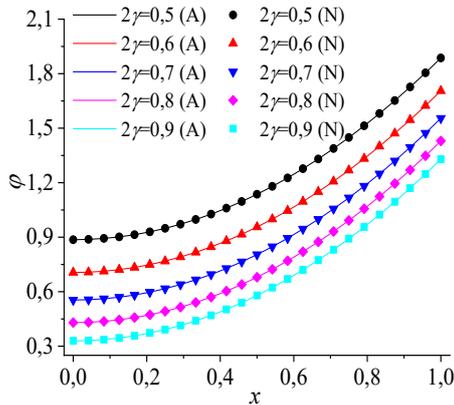
<i>x</i>	[45]	[46]	[47]	<i>NPC</i> =3	<i>NPC</i> =4	<i>NPC</i> =5
<b>0,1</b>	0	6,47x10 <sup>-6</sup>	1,21x10 <sup>-3</sup>	6,87x10 <sup>-5</sup>	2,34x10 <sup>-8</sup>	8,78x10 <sup>-10</sup>
<b>0,2</b>	0	1,58x10 <sup>-5</sup>	1,26x10 <sup>-3</sup>	8,99x10 <sup>-5</sup>	1,34x10 <sup>-8</sup>	5,66x10 <sup>-10</sup>
<b>0,3</b>	1,11x10 <sup>-16</sup>	2,28x10 <sup>-5</sup>	1,87x10 <sup>-3</sup>	2,44x10 <sup>-6</sup>	2,56x10 <sup>-8</sup>	2,22x10 <sup>-10</sup>
<b>0,4</b>	0	2,72x10 <sup>-5</sup>	7,42x10 <sup>-3</sup>	3,55x10 <sup>-5</sup>	1,11x10 <sup>-9</sup>	3,33x10 <sup>-10</sup>
<b>0,5</b>	0	2,76x10 <sup>-5</sup>	1,00x10 <sup>-6</sup>	2,23x10 <sup>-5</sup>	1,22x10 <sup>-8</sup>	2,28x10 <sup>-10</sup>
<b>0,6</b>	2,23x10 <sup>-16</sup>	2,54x10 <sup>-5</sup>	7,46x10 <sup>-3</sup>	2,33x10 <sup>-5</sup>	4,54x10 <sup>-8</sup>	5,65x10 <sup>-10</sup>
<b>0,7</b>	0	2,04x10 <sup>-5</sup>	1,73x10 <sup>-3</sup>	2,27x10 <sup>-5</sup>	2,22x10 <sup>-8</sup>	3,74x10 <sup>-11</sup>
<b>0,8</b>	2,23x10 <sup>-16</sup>	1,32x10 <sup>-5</sup>	5,01x10 <sup>-3</sup>	3,74x10 <sup>-5</sup>	5,55x10 <sup>-8</sup>	2,33x10 <sup>-10</sup>
<b>0,9</b>	0	4,65x10 <sup>-6</sup>	1,73x10 <sup>-2</sup>	9,29x10 <sup>-6</sup>	1,12x10 <sup>-8</sup>	2,86x10 <sup>-10</sup>
<b>TP (s)</b>	-	-	-	3,2	6,3	8,2

Nesta tabela é possível observar que, para *NPC* igual a 3, os resultados obtidos são superiores aos encontrados considerando o Método de Wavelet e da mesma ordem de grandeza que os obtidos pelo Método de colocação Sinc-Legendre, mesmo considerando um número bem inferior de pontos de colocação. Já com relação ao Método Wavelet de Bernstein Normalizado, a metodologia proposta obteve boas estimativas considerando *NPC* igual a 5. Como esperado, o aumento no valor do número de pontos de colocação implica na redução do erro cometido devido ao refinamento da solução (aumento no número de equações que formam o sistema diferencial fracionário resultante). Em relação ao tempo de processamento, quanto maior o valor do parâmetro *NPC*, maior é o tempo requerido para a integração do modelo diferencial. Isto se deve ao aumento do número de equações diferenciais ordinárias fracionárias obtidas com o processo de discretização.

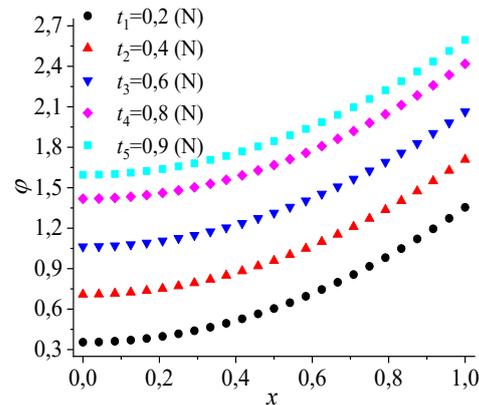
Já na Tabela 2 são apresentados os resultados obtidos pela metodologia proposta considerando diferentes valores para  $2\gamma$ ,  $x$  igual a 0,5 e  $t$  igual a 0,5. Os resultados apresentados demonstram que, independentemente da ordem considerada, a metodologia proposta sempre foi capaz de obter boas estimativas em relação as respectivas soluções analíticas, conforme a Figura 2a. Além disso, nesta figura observa-se a influência da ordem fracionária nos perfis simulados. Conforme observado na Tabela 1, o aumento do número de pontos de colocação implica na minimização do Erro Absoluto Máximo observado. Já na Figura 2b é possível observar, para  $2\gamma$  igual a 0,5 a evolução do modelo ao longo do tempo.

Tabela 2: Erro Absoluto Máximo considerando diferentes ordens fracionárias para o estudo de caso 1 ( $x=0,5$  e  $t=0,5$ ).

$NPC$	$2\gamma=0,5$	$2\gamma=0,6$	$2\gamma=0,7$	$2\gamma=0,8$	$2\gamma=0,9$
3	$2,23 \times 10^{-5}$	$1,33 \times 10^{-6}$	$5,66 \times 10^{-5}$	$4,35 \times 10^{-5}$	$7,77 \times 10^{-5}$
4	$1,22 \times 10^{-8}$	$1,66 \times 10^{-8}$	$2,33 \times 10^{-8}$	$3,46 \times 10^{-8}$	$6,77 \times 10^{-8}$
5	$2,28 \times 10^{-10}$	$2,85 \times 10^{-11}$	$1,24 \times 10^{-10}$	$5,66 \times 10^{-11}$	$1,76 \times 10^{-11}$



(a) Analítica (A) × Numérica (N) ( $t=0,5$ ).



(b) Numérica (N) ( $2\gamma=0,5$ ).

Figura 2: Perfis de  $\varphi$  em função das variáveis  $x$  e  $t$  para o primeiro estudo de caso ( $NPC=5$ ).

### 5.2 Estudo de Caso 2

A segunda aplicação considera uma EDPF no espaço em que:  $\gamma=0,5$ ;  $2\alpha=[1,2 \ 1,4 \ 1,6 \ 1,8 \ 2]$ ,  $x_f=\pi$ ,  $t_f=5$ ,  $A_1(x,t)=1$ ,  $A_2(x,t)=0$ ,  $A_3(x,t)=-1/4$ ,  $A_4(x,t)=0$ ,  $B_1=B_4=1$ ,  $B_2=B_3(t)=B_5=B_6(t)=0$  [48]. Já a função  $g_1(x)$  é definida como:

$$g_1(x) = x^2(\pi - x) \tag{37}$$

Por se tratar de uma aplicação onde  $\gamma$  é igual a  $1/2$ , somente é necessário definir uma condição inicial, isto é; a função  $g_1(x)$  para que o modelo diferencial fracionário possa ser integrado.

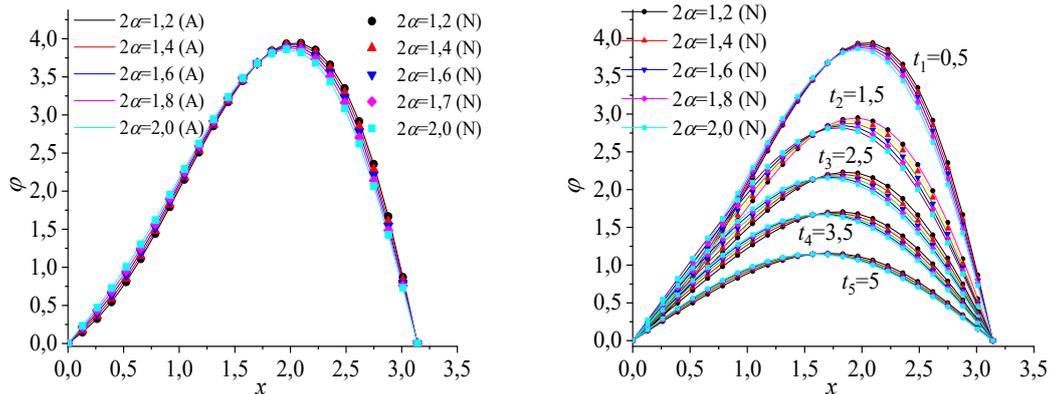
O modelo acima tem a seguinte solução analítica segundo Yang et al. (2010) [48]:

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{8(-1)^{n+1} - 4}{n^3} \right) \sin(nx) \exp(-0,25n^{2\alpha}t) \right) \tag{38}$$

Na Tabela 3 são apresentadas as métricas de erro considerando a metodologia proposta para diferentes números de pontos de colocação ( $NPC$ ), os respectivos tempos de processamento e  $2\alpha$  igual a  $1,8$ . Nesta tabela é possível observar que, para os diferentes instantes de tempo, boas estimativas em relação as soluções analíticas são encontradas, conforme a Figura 3a. Os resultados obtidos considerando  $NPC$  igual a 3 estão em concordância com aqueles reportados usando o Método da Matriz Transformada [48] com 80 pontos de discretização, cujo Erro Absoluto Máximo é da ordem de  $10^{-4}$ . Já para maiores valores de  $NPC$  os erros computados pela metodologia proposta são menores do que aqueles reportados considerando o Método da Matriz Transformada. Como observado na aplicação anterior, o erro é reduzido com o aumento no  $NPC$ . Por outro lado, o tempo de processamento é incrementado com o aumento no valor do número de pontos de colocação. Já na Figura 3b é possível observar os perfis da variável dependente ao longo do tempo, isto é, quanto maior o valor do tempo, mais próximo o perfil se aproxima de zero. Além disso, as mudanças no valor da ordem fracionária implicam em mudanças discretas no perfil de  $\varphi$  para um tempo em particular (ver as Figuras 3a e 3b).

Tabela 3: Métricas de erro  $L_2$  (Eq.(30)) e  $L_\infty$  (Eq.(31)) considerando diferentes valores para  $t$  e NPC para o estudo de caso 2 ( $2\alpha = 1,8$ ). TP é o tempo de processamento.

NPC		$t=0,5$	$t=1,5$	$t=2,5$	$t=3,5$	$t=5$	TP (s)
3	$L_\infty$	$3,43 \times 10^{-4}$	$1,77 \times 10^{-4}$	$2,67 \times 10^{-4}$	$2,33 \times 10^{-4}$	$4,53 \times 10^{-4}$	2,2
	$L_2$	$2,85 \times 10^{-4}$	$6,33 \times 10^{-4}$	$4,54 \times 10^{-4}$	$3,23 \times 10^{-4}$	$5,66 \times 10^{-4}$	
4	$L_\infty$	$2,45 \times 10^{-6}$	$7,98 \times 10^{-6}$	$3,34 \times 10^{-7}$	$1,99 \times 10^{-7}$	$2,97 \times 10^{-7}$	5,4
	$L_2$	$2,55 \times 10^{-7}$	$9,87 \times 10^{-7}$	$3,45 \times 10^{-7}$	$7,89 \times 10^{-7}$	$8,88 \times 10^{-7}$	
5	$L_\infty$	$1,66 \times 10^{-9}$	$6,87 \times 10^{-10}$	$6,63 \times 10^{-10}$	$4,89 \times 10^{-10}$	$3,90 \times 10^{-10}$	7,1
	$L_2$	$1,45 \times 10^{-10}$	$8,45 \times 10^{-10}$	$5,06 \times 10^{-10}$	$2,76 \times 10^{-10}$	$2,29 \times 10^{-10}$	



a) Analítica (A) × Numérica (N) ( $t=0,5$ ).

(b) Numérica (N).

Figura 3: Perfis de  $\varphi$  em função das variáveis  $x$  e  $t$  para o segundo estudo de caso ( $NPC=5$ ).

### 5.3 Estudo de Caso 3

O próximo estudo de caso considera uma EDPF no tempo e no espaço de forma que:  $\gamma=3/5$ ,  $\alpha=3/4$ ,  $x_f=t_f=1$ ,  $A_1(x,t)=1$ ,  $A_2(x,t)=0$ ,  $A_3(x,t)=-1$ ,  $B_1=B_4=1$ ,  $B_2=B_5=0$ ,  $B_3(t)=t^2$  e  $B_6(t)=1+t$  [45]<sup>2</sup>. Já as funções  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  e  $A_4(x,t,\varphi)$  são definidas como:

$$g_1(x) = x^2 \tag{39}$$

$$g_2(x) = x^2 + 1 \tag{40}$$

$$A_4(x,t,\varphi) = 4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{5}{2\Gamma(4/5)} t^{4/5} \tag{41}$$

A solução analítica é descrita segundo Entezari et al. (2019) [45] como:

$$\varphi(x,t) = x^2 + t^2 \tag{42}$$

Na Tabela 4 são apresentadas as métricas de erro e o tempo de processamento considerando a metodologia proposta. Nesta tabela observa-se boas estimativas para o valor de  $\varphi$  para diferentes instantes de tempo  $t$ , independentemente do valor do NPC. Em relação ao erro máximo reportado usando o Método Wavelet de Bernstein Normalizado com 12 pontos de colocação [45] (erro da ordem de  $10^{-16}$ ), é possível observar uma boa concordância para NPC igual a 5. Em relação ao tempo de processamento, o aumento no valor do parâmetro NPC resulta no incremento deste valor.

Tabela 4: Métricas de erro  $L_2$  (Eq.(30)) e  $L_\infty$  (Eq.(31)) considerando diferentes valores para  $t$  e NPC para o estudo de caso 3 ( $\gamma=3/5$  e  $\alpha=3/4$ ). TP é o tempo de processamento.

NPC		$t=0,2$	$t=0,4$	$t=0,6$	$t=0,8$	$t=1$	TP (s)
3	$L_\infty$	$1,33 \times 10^{-5}$	$3,78 \times 10^{-5}$	$2,75 \times 10^{-5}$	$2,33 \times 10^{-5}$	$6,73 \times 10^{-5}$	2,7
	$L_2$	$2,54 \times 10^{-5}$	$4,53 \times 10^{-5}$	$2,46 \times 10^{-5}$	$2,45 \times 10^{-5}$	$2,89 \times 10^{-5}$	
4	$L_\infty$	$1,53 \times 10^{-7}$	$8,89 \times 10^{-7}$	$2,99 \times 10^{-7}$	$4,66 \times 10^{-7}$	$1,17 \times 10^{-7}$	6,2
	$L_2$	$1,47 \times 10^{-7}$	$4,77 \times 10^{-7}$	$6,53 \times 10^{-7}$	$6,87 \times 10^{-7}$	$6,77 \times 10^{-7}$	
5	$L_\infty$	$1,22 \times 10^{-10}$	$3,74 \times 10^{-11}$	$5,55 \times 10^{-10}$	$2,72 \times 10^{-10}$	$6,75 \times 10^{-10}$	7,5
	$L_2$	$1,05 \times 10^{-10}$	$3,55 \times 10^{-10}$	$2,29 \times 10^{-10}$	$3,43 \times 10^{-10}$	$1,54 \times 10^{-10}$	

Na Figura 4 é possível observar os perfis analíticos e numéricos para a variável dependente  $\varphi$  em função do espaço para diferentes instantes de tempo considerando  $\gamma=3/5$ ,  $\alpha=3/4$  e  $NPC=5$ . Nesta observa-se uma boa concordância entre os perfis reais e aproximados.

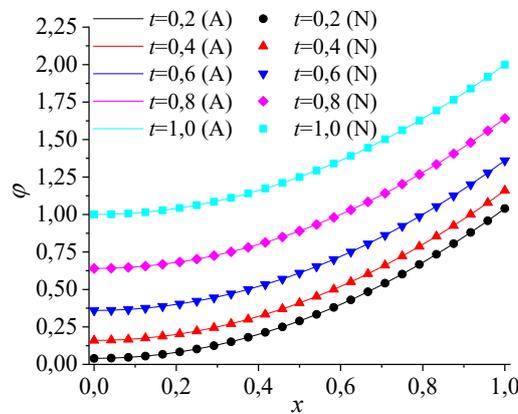


Figura 4: Perfis de  $\varphi$  em função das variáveis  $x$  e  $t$  para o terceiro estudo de caso ( $NPC=5$ ) (Analítica (A) e Numérica (N)).

### 5.4 Estudo de Caso 4

O último estudo de caso considera uma EDPF no tempo e no espaço onde tem-se:  $\gamma=2/3$ ,  $\alpha=3/4$ ,  $x_f=t_f=1$ ,  $A_1(x,t)=1$ ,  $A_2(x,t)=A_3(x,t)=-1$ ,  $B_1=B_4=1$ ,  $B_2=B_3=0$ ,  $B_3(t)=t$  e  $B_6(t)=1+t$  [45]. Já as funções  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  e  $A_4(x,t,\varphi)$  são definidas como:

$$g_1(x) = x^2 \tag{43}$$

$$g_2(x) = x^2 + 1 \tag{44}$$

$$A_4(x,t,\varphi) = x^2 + t + 4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{16\sqrt{2}}{5\pi} \Gamma(3/4) - \varphi(x,t) \tag{45}$$

A solução analítica é descrita segundo Entezari et al. (2019) [45] como:

$$\varphi(x,t) = x^2 + t \tag{46}$$

A comparação entre as métricas de erro considerando diferentes números de pontos de colocação ( $NPC$ ) e os respectivos tempos de processamento são apresentados na Tabela 5. Nesta observa-se que, o aumento no valor de  $NPC$  implica na redução do erro computado devido ao refinamento da solução (aumento no número de equações diferenciais que descrevem o modelo discretizado). Ao se comparar os resultados obtidos pelo Método Wavelet de Bernstein Normalizado com 12 pontos de colocação [45] (erro da ordem de  $10^{-16}$ ) com a metodologia proposta, observa-se uma boa concordância com  $NPC$  igual a 5. Conforme comentado

anteriormente, o aumento no valor do NPC implica no aumento no valor do tempo de processamento requerido para integrar o modelo diferencial fracionário.

Tabela 5: Métricas de erro  $L_2$  (Eq.(30)) e  $L_\infty$  (Eq.(31)) considerando diferentes valores para  $t$  e NPC para o estudo de caso 4 ( $\gamma=2/3, \alpha=3/4$ ). TP é o tempo de processamento.

NPC		$t=0,1$	$t=0,3$	$t=0,5$	$t=0,7$	$t=0,9$	TP (s)
12 <sup>#</sup>	$L_\infty$	$1,11 \times 10^{-16}$	$2,22 \times 10^{-16}$	$1,99 \times 10^{-15}$	$2,88 \times 10^{-15}$	$5,55 \times 10^{-15}$	-
	$L_2$	$3,78 \times 10^{-17}$	$1,02 \times 10^{-16}$	$6,43 \times 10^{-16}$	$9,07 \times 10^{-16}$	$1,73 \times 10^{-15}$	-
3 <sup>§</sup>	$L_\infty$	$2,34 \times 10^{-4}$	$2,78 \times 10^{-5}$	$3,55 \times 10^{-5}$	$6,78 \times 10^{-5}$	$2,34 \times 10^{-5}$	2,5
	$L_2$	$1,45 \times 10^{-5}$	$1,33 \times 10^{-5}$	$7,39 \times 10^{-5}$	$4,67 \times 10^{-5}$	$1,39 \times 10^{-5}$	
4 <sup>§</sup>	$L_\infty$	$6,77 \times 10^{-7}$	$3,55 \times 10^{-8}$	$7,88 \times 10^{-7}$	$7,23 \times 10^{-8}$	$1,89 \times 10^{-7}$	4,7
	$L_2$	$5,87 \times 10^{-8}$	$8,45 \times 10^{-8}$	$5,91 \times 10^{-8}$	$1,46 \times 10^{-8}$	$6,77 \times 10^{-8}$	
5 <sup>§</sup>	$L_\infty$	$3,77 \times 10^{-10}$	$2,22 \times 10^{-10}$	$1,89 \times 10^{-10}$	$9,80 \times 10^{-10}$	$4,44 \times 10^{-10}$	6,2
	$L_2$	$9,89 \times 10^{-10}$	$8,96 \times 10^{-10}$	$4,97 \times 10^{-10}$	$2,79 \times 10^{-11}$	$6,69 \times 10^{-11}$	

<sup>#</sup>[45], <sup>§</sup>Neste trabalho.

Na Figura 5 é possível observar os perfis analíticos e numéricos para a variável dependente  $\varphi$  em função do espaço para diferentes instantes de tempo considerando  $\gamma=2/3, \alpha=3/4$  e NPC=5. Observa-se nesta figura uma boa concordância entre ambos os perfis.

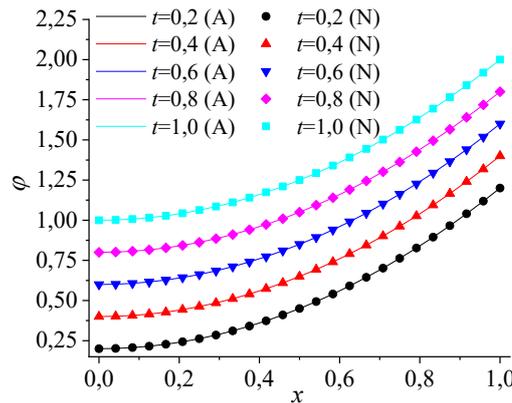


Figura 5: Perfis de  $\varphi$  em função das variáveis  $x$  e  $t$  para o quarto estudo de caso (NPC=5) (Analítica (A) e Numérica (N)).

## 6. CONCLUSÃO

A presente contribuição teve como objetivo propor uma abordagem numérica para a integração de uma Equação Diferencial Parcial Fracionária (transiente e uni-dimensional). Para essa finalidade, foi proposto o Método Pseudo-Espectral de Legendre Fracionário (MPELF) para transformar o modelo diferencial fracionário parcial em um sistema de equações diferenciais ordinários fracionários. Para resolver o referido sistema de equações foi empregado o Método de Adams Fracionário (MAF). A metodologia proposta foi aplicada em uma série de estudos de caso puramente matemáticos, mas que apresentam solução analítica. A partir dos resultados obtidos é possível concluir que a metodologia proposta foi capaz de obter boas estimativas para os perfis da variável dependente, visto a ordem de grandeza das métricas de erro obtidas. Além disso, ressalta-se que a associação entre os métodos empregado para a integração de modelos fracionários é capaz de lidar com problemas com ordens inteiras (no tempo e/ou no espaço).

É importante ressaltar que, embora não tenham sido resolvidos estudos de caso físicos (como por exemplo problemas de difusão, difusão anômala ou difusão-convecção-reação), a

metodologia proposta pode ser empregada para essa finalidade, bastando apenas avaliar os modelos físicos do ponto de vista dimensional.

Como propostas de trabalhos futuros pretende-se: *i*) empregar a estratégia numérica para a resolução de problemas inversos fracionários considerando para essa finalidade pontos experimentais reais; e *ii*) propor uma metodologia para corrigir, dimensionalmente, os termos diferenciais fracionários em problemas físicos.

## 7. AGRADECIMENTOS

Este estudo foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), processo número 309178/2023-1.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Rodrigues FG, Oliveira EC. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. *Rev Bras Ens Fis.* 2015;37:3305-15. doi: 10.1590/S1806-11173731842
- Lobato FS, Lima WJ, Borges RA, Cavalini Jr AAp, Steffen Jr V. The solution of direct and inverse fractional advection-dispersion problem by using orthogonal collocation and differential evolution. *Soft Comp.* 2019;1:1-11. doi: 10.1007/s00500-019-04541-y
- Lima JVCF, Lobato FS, Steffen Jr V. Solution of mass-spring-damper fractional systems using Caputo derivative and orthogonal collocation. *Eng Comp.* 2022;39:1432-50. doi: 10.1108/EC-04-2021-0199
- Lobato, FS, Cardoso AO. Numerical solution of fractional boundary value problems in chemical engineering using the shooting method. *Rev CEREU.* 2023;15:149-65. doi: 10.18605/2175-7275/cereus.v15n2p149-165
- Galvão RKH, Hadjiloucas S, Kienitz KH, Paiva HM, Afonso RJM. Fractional order modeling of large three-dimensional RC networks. *IEEE Trans Circ Syst I: Regular Papers.* 2013;60:624-37. doi: 10.1109/TCSI.2012.2209733
- Badri V, Tavazoei MS. Fractional order control of thermal systems: achievability of frequency-domain requirements. *Nonlinear Dyn.* 2015;80:1773-83. doi: 10.1007/s11071-014-1394-1
- Podlubny I. *Fractional differential equations.* San Diego (US): University of California San Diego; Academic Press; 1999.
- Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II. *J R Soc West Aust.* 1967;13:529-39.
- Heymans N, Podlubny I. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Rheol Acta.* 2006;45:765-71. doi: 10.1007/s00397-005-0043-5
- Kirchner JW, Feng X, Neal C. Fractal stream chemistry and its implications for contaminant transport in catchments. *Nat.* 2000;403:524-6. doi: 10.1038/35000537
- Sabatelli L, Keating S, Dudley J, Richmond P. Waiting time distributions in financial markets. *Eur Phys J B.* 2002;27:273-5. doi: 10.1140/epjb/e20020151
- Schumer R, Benson DA, Meerschaert MM, Baeumer B. Multiscaling fractional advection-dispersion equation and their solutions. *Water Resour Res.* 2003;39:1022-32. doi: 10.1029/2001WR001229
- Magin RL. Fractional calculus in bioengineering. *Crit Rev Biomed Eng.* 2006;32:1-104. doi: 10.1615/critrevbiomedeng.v32.i1.10
- Larsson S, Racheva M, Saedpanah F. Discontinuous Galerkin method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticity. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2015;283:196-209. doi: 10.1016/j.cma.2014.09.018
- Yuan ZB, Nie YF, Liu F, Turner I, Zhang GY, Gu YT. An advanced numerical modeling for Riesz space fractional advection-dispersion equations by a meshfree approach. *Appl Math Model.* 2016;40:7816-29. doi: 10.1016/j.apm.2016.03.036
- Su D, Bao W, Liu J, Gong C. An efficient simulation of the fractional chaotic system and its synchronization. *J Franklin Inst.* 2016;355:9072-84. doi: 10.1016/j.jfranklin.2016.10.045
- Kumar V, Rana KPS. Nonlinear adaptive fractional order fuzzy PID control of a 2-link planar rigid manipulator with payload. *J Franklin Inst.* 2017;354:993-1022. doi: 10.1016/j.jfranklin.2016.11.006
- Zhang X, Liu L, Wu Y, Wiwatanapataphee B. Nontrivial solutions for a fractional advection-dispersion equation in anomalous diffusion. *Appl Math Lett.* 2017;66:1-8. doi: 10.1016/j.aml.2016.10.015
- Yang X-J, Machado JAT, Baleanu D. Exact traveling-wave solution for local fractional Boussinesq equation in fractal domain. *Fractals.* 2017;25:1740006-13. doi: 10.1142/S0218348X17400060

20. Yang X-J, Gao F, Ju Y, Zhou H-W. Fundamental solutions of the general fractional-order diffusion equations. *Math Meth in the Appl Sci.* 2018;41:9312-20. doi: 10.1002/mma.5341
21. Liang X, Yang Y-G, Gao F, Yang X-J, Xue Y. Anomalous advection-dispersion equations within general fractional-order derivatives: models and series solutions. *Entropy.* 2018;20:78-85. doi: 10.3390/e20010078
22. Yang X-J, Feng Y-Y, Cattani C, Inc M. Fundamental solutions of anomalous diffusion equations with the decay exponential kernel. *Math Meth Appl Sci.* 2019;1:1-7. doi: 10.1002/mma.5634
23. Lima JVCF, Lobato FS, Steffen Jr V. Solution of fractional optimal control problems by using orthogonal collocation and multi-objective optimization stochastic fractal search. *Adv Comp Int.* 2021;1:1-21. doi: 10.1007/s43674-021-00003-x
24. Godoi FAP, Lobato FS, Damasceno JJR. Solution of inverse anomalous mass transfer problems using a hyperbolic space-fractional model and differential evolution. *Rev Obser La Econ Lat-Am.* 2023;21:26050-75. doi: 10.55905/oelv21n12-140
25. Shawagfeh NT. Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations. *Appl Math Comput.* 2002;131:517-29. doi: 10.1016/S0096-3003(01)00167-9
26. Arikoglu A, Ozkol I. Solution of fractional differential equations by using differential transform method. *Ch Sol Frac,* 2007;34:1473-81. doi: 10.1016/j.chaos.2006.09.004
27. Das S. Analytical solution of a fractional diffusion equation by variational iteration method. *Comp Math App.* 2009;57:483-7. doi: 10.1016/j.camwa.2008.09.045
28. Saadatmandi A, Dehghan M. A new operational matrix for solving fractional order differential equations. *Comp Math App.* 2010;59:1326-36. doi: 10.1016/j.camwa.2009.07.006
29. Dehghan M, Manafian J, Saadatmandi A. Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method. *Numer Methods Partial Differ Equ.* 2010;26:448-79. doi: 10.1002/num.20460
30. Kexue L, Jigen P. Laplace transform and fractional differential equations. *Appl Math Lett.* 2011;24:2019-23. doi: 10.1016/j.aml.2011.05.035
31. Diethelm K, Ford N. A predictor–corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dyn.* 2002;29:3-22. doi: 10.1023/A:1016592219341
32. Mendonça AKF, Evangelista TS, Rispoli VC, Amori RGG. Resolvendo numericamente equações diferenciais fracionárias. *Rev Bras Ens Fis.* 2022;4:1-12. doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0426
33. Galeone L, Garrappa R. On multistep methods for differential equations of fractional order. *Mediterr J Math.* 2006;3:565-80. doi: 10.1007/s00009-006-0097-3
34. Li C, Zeng F. The finite difference methods for fractional ordinary differential equations. *Numer Func Anal Opt.* 2013;34:149-79. doi: 10.1080/01630563.2012.706673
35. Jator S, Biala TA. Block backward differentiation formulas for fractional differential equations. *J Eng Math.* 2015;650425:1-10. doi: 10.1155/2015/650425
36. Batogna R, Atangana A. New two step Laplace Adam–Bashforth method for integer and non integer order partial differential equations. *Numer Methods Partial Differ Equ.* 2017;34:1739-58. doi: 10.1002/num.22216
37. Demirci E, Ozalp N. A method for solving differential equations of fractional order. *J Comput Appl Math.* 2012;236:2754-62.
38. Rehman M, Khan RA. A numerical method for solving boundary value problems for fractional differential equations. *Appl Math Model.* 2012;36:894-907. doi: 10.1016/j.apm.2011.07.045
39. Aslefallah M, Rostamy D. A numerical scheme for solving space-fractional equation by finite differences theta-method. *Int J Adv Appl Math Mech.* 2014;1:1-9.
40. Yang X-J, Gao F, Machado JAT, Baleanu D. A new fractional derivative involving the normalized sine function without singular kernel. *Eur Phys J.* 2017;226:3567-75. doi: 10.1140/epjst/e2018-00020-2
41. Villadsen JV, Stewart WE. Solution of boundary-value problems by orthogonal collocation. *Chem Eng Sci.* 1967;22:1483-501. doi: 10.1016/0009-2509(67)80074-5
42. Villadsen J, Michelsen ML. Solution of differential equation models by polynomial approximation. Oxford; New York (US): Oxford University Press; 1978.
43. Becerra VM, Galvão RKH. Um tutorial sobre métodos pseudo-espectrais para controle ótimo computacional. *Rev Cont Aut.* 2010;21:224-44. doi: 10.1590/s0103-17592010000300002
44. Diethelm K, Ford NJ, Freed AD. Detailed error analysis for a fractional Adams method. *Numer Alg.* 2004;36:31-52. doi: 10.1023/B:NUMA.0000027736.85078.be
45. Entezari M, Abbasbandy S, Babolian E. Numerical solution of fractional partial differential equations with normalized Bernstein wavelet method. *J Appl Math.* 2019;14:890-909.
46. Saadatmandi A, Dehghan M, Azizi MR. The Sinc-Legendre collocation method for a class of fractional convection-diffusion equations with variable coefficients. *Commun Nonlinear Sci Numer Sim.* 2012;17:4125-36. doi: 10.1016/j.cnsns.2012.03.003

47. Chen Y, Wu Y, Cui Y, Wang Z, Jin D. Wavelet method for a class of fractional convection–diffusion equation with variable coefficients. *J Comput Sci.* 2010;1:146-9. doi: 10.1016/j.jocs.2010.07.001
48. Yang Q, Liu F, Turner I. Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives. *Appl Math Model.* 2010;43:200-18.