SCIENTIA PLENA **VOL. 5, NUM. 11** **2009**
www.scientiaplena.org.br

Gravitação Dual de Partículas Relativísticas

G. M. A. Almeida & W. F. Chagas Filho

Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-SE, Brasil

guilherme_fisica@hotmail.com

(Recebido em 01 de setembro de 2009; aceito em 01 de novembro de 2009)

As teorias de gravitação usuais, como a teoria de gravitação não relativística de Newton e a teoria de gravitação relativística de Einstein, baseiam-se no conceito de campos gravitacionais em pontos bem definidos no espaço. Este conceito dificulta a transição para uma teoria quantizada da gravitação porque, na Mecânica Quântica, é impossível manter a noção de um ponto bem definido no espaço. Desenvolvimentos recentes na compreensão da física de buracos negros mostram que este problema pode ser contornado incorporando na teoria de gravitação a dualidade onda-partícula, o que leva a uma quantização no espaço de fase. Neste trabalho investigamos uma teoria de gravitação definida sobre a linha de universo de uma partícula relativística sem massa. Utilizando o método Hamiltoniano vinculado, somos capazes de demonstrar que a dualidade onda-partícula relaciona a simetria local da partícula relativística e as equações de movimento na presença de campos tensoriais dependentes da posição com a simetria local e as equações de movimento na presença de campos tensoriais dependentes do momento. Isto revela uma gravitação dual de partículas relativísticas.
Palavras-chave: partículas relativísticas, dualidade, campos tensoriais.

The usual gravitation theories, like Newton´s non-relativistic theory of gravitation and Einstein´s relativistic one, are based on the concept of gravitational fields at well defined points in space. This concept makes the transition to a quantized gravitational theory harder because, in quantum mechanics, it´s impossible to work at a well defined point in space. Recent developments in black hole physics show us that this problem can be solved by incorporating the wave-particle duality into gravitational theory, resulting in a quantization of phase space. In this paper, we investigate a gravitational theory defined at the universe line of a massless relativistic particle. Using constrained Hamiltonian method, we are able of showing that the wave-particle duality relates the particle´s local symmetry and equations of motion in presence of position dependent tensorial fields with local symmetry and equations of motion in presence of momentum dependent tensorial fields. It reveals a dual gravitation of relativistic particles.
Keywords: relativistic particles, duality, tensorial fields.

---

1. INTRODUÇÃO

Estudos recentes têm indicado que o campo gravitacional deve conter a dualidade onda-partícula. Esta abordagem é consistente pelo fato da mecânica quântica poder ser formulada, equivalentemente, na posição ou no momento. A idéia é aplicar essa dualidade em teoria de partícula relativística verificando as simetrias locais existentes e a estabilidade dinâmica da teoria. Vamos analisar a ação da partícula sem massa, pois, além de ser mais simples, apresenta mais invariâncias do que a ação para a partícula com massa. Para o nosso objetivo, vamos tratar a partícula como um sistema vinculado [4] e isto nos permitirá construir uma ação mais geral que apresenta mais vantagens em relação às formulações usuais.

2. PARTÍCULAS RELATIVÍSTICAS SEM MASSA

Uma partícula relativística com massa m num espaço de Minkowski com d dimensões (assumimos $d > 2$) e métrica $\eta_{\mu\nu} = (-1,+1,...,+1),$ depende apenas do parâmetro temporal τ e pode ser descrita pela ação Lagrangeana

$$S = -m\int d\tau\sqrt{-\dot{x}^2(\tau)}\,, \tag{1}$$

onde x_μ, $\mu = 0,1,...,d-1$ são as coordenadas da partícula, $\dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ e $\dot{x}^\mu = dx^\mu / d\tau$.

Fazendo a transição para o formalismo Hamiltoniano, obtemos o momento canônico

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \tag{2}$$

e a Hamiltoniana é nula, $H = 0$. Do momento (2) obtemos o vínculo primário

$$\phi = \frac{1}{2}(p^2 + m^2) \approx 0\,. \tag{3}$$

Estamos seguindo a convenção de Dirac onde o vínculo só é considerado zero após os cálculos serem realizados. Por isto escrevemos $\approx$ que significa uma igualdade “fraca”. Dizemos então que o vínculo ϕ é “fracamente” nulo. Vamos incorporar o vínculo ao formalismo escrevendo a Hamiltoniana estendida de Dirac

$$H_E = H + \lambda\phi = \frac{1}{2}\lambda(p^2 + m^2)\,, \tag{4}$$

onde vemos que, como um sistema Hamiltoniano vinculado, a partícula relativística é descrita pela ação

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau \left[p_\mu \dot{x}^\mu - H_E \right] \\ &= \int d\tau \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}\lambda(p^2 + m^2) \right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Uma partícula relativística sem massa é, então, descrita pela ação

$$S = \int d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}\lambda p^2 \right), \tag{6}$$

que define um sistema de invariância conforme em *d* dimensões. A Hamiltoniana é

$$H = \frac{1}{2}\lambda p^2\,. \tag{7}$$

A equação de movimento para o multiplicador de Lagrange nos fornece o vinculo de primeira ordem

$$\phi = \frac{1}{2}p^2 \approx 0\,. \tag{8}$$

Introduzindo os parênteses de Poisson

$$\{x_\mu, x_\nu\} = 0\,, \qquad \{p_\mu, p_\nu\} = 0\,, \qquad \{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu}\,, \tag{9}$$

e requerendo a estabilidade [4] do vinculo (8)

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = \lambda\{\phi, \phi\} = 0\,, \tag{10}$$

percebemos que é automaticamente satisfeita.

O vínculo (8) gera transformações locais com parâmetro arbitrário $\varepsilon(\tau)$, dadas por

$$\delta x_\mu = \varepsilon(\tau)\{x_\mu, \phi\} = \varepsilon p_\mu \tag{11.a}$$

e

$$\delta p_\mu = \varepsilon(\tau)\{p_\mu, \phi\} = 0\,, \tag{11.b}$$

pelas quais a ação (6) se transforma como

$$\delta S = \int d\tau \left[\frac{d}{d\tau}(\varepsilon\phi) + \dot{\varepsilon}\phi - \phi\delta\lambda \right], \tag{11.c}$$

onde podemos escolher $\delta\lambda = \dot{\varepsilon}$ e a variação (11.c) fica

$$\delta S = \int d\tau \frac{d}{d\tau}(\varepsilon\phi)\,, \tag{11.d}$$

na qual a quantidade

$$Q = \varepsilon\phi = \frac{1}{2}\varepsilon p^2 \tag{12}$$

pode ser interpretada como a carga de Noether Hamiltoniana conservada, ou como o gerador das transformações locais (11), dependendo se as equações de movimento são satisfeitas ou não.

As equações Hamiltonianas de movimento são dadas por:

$$\dot{x}_\mu = \{x_\mu, H\} = \lambda p_\mu \tag{13.a}$$

e

$$\dot{p}_\mu = \{p_\mu, H\} = 0\,. \tag{13.b}$$

3. CAMPOS TENSORIAIS DEPENDENTES DA POSIÇÃO

A ação (6) pode ser estendida para uma ação com um campo tensorial dependente da posição. Ela é escrita como

$$S = \int d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}\lambda g_{\mu\nu}(x) p^\mu p^\nu \right), \tag{14}$$

onde a Hamiltoniana é

$$H = \frac{1}{2}\lambda g_{\mu\nu}(x) p^\mu p^\nu\,. \tag{15}$$

A equação de movimento para a variável $\lambda(\tau)$, nos fornece o vínculo

$$\phi = \frac{1}{2}\lambda g_{\mu\nu}(x) p^{\mu} p^{\nu} \approx 0 . \tag{16}$$

Se requerermos as estabilidade dinâmica do vínculo (16), teremos

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = \lambda\{\phi, \phi\} = 0 , \tag{17}$$

que é automaticamente satisfeita. Isto implica que o vinculo (16) é de primeira ordem. O vinculo gera as transformações locais com parâmetro arbitrário $\varepsilon(\tau)$,

$$\delta x_{\mu} = \varepsilon(\tau)\{x_{\mu}, \phi\} = \varepsilon g_{\mu\nu}(x) p^{\nu} \tag{18.a}$$

e

$$\delta p_{\mu} = \varepsilon(\tau)\{p_{\mu}, \phi\} = -\frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\mu}} p^{\alpha} p^{\beta} , \tag{18.b}$$

pelas quais

$$\delta S = \int d\tau \left[\frac{d}{d\tau}(\varepsilon\phi) + \dot{\varepsilon}\phi - \phi\delta\lambda \right] , \tag{18.c}$$

onde podemos escolher $\delta\lambda = \dot{\varepsilon}$ e a variação (11c) fica

$$\delta S = \int d\tau \frac{d}{d\tau}(\varepsilon\phi) , \tag{18.d}$$

mostrando que a carga de Noether Hamiltoniana conservada com um campo tensorial $g_{\mu\nu}(x)$ é a quantidade

$$Q = \varepsilon\phi = \frac{1}{2}\varepsilon g_{\mu\nu}(x) p^{\mu} p^{\nu} . \tag{19}$$

As equações Hamiltonianas de movimento são dadas por

$$\dot{x}_{\mu} = \{x_{\mu}, H\} = \lambda g_{\mu\nu}(x) p^{\nu} \tag{20.a}$$

e

$$\dot{p}_{\mu} = \{p_{\mu}, H\} = -\frac{1}{2}\lambda \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\mu}} p^{\alpha} p^{\beta} , \tag{20.b}$$

onde nota-se que estas se reduzem para as equações de movimento (13) quando $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$.

4. CAMPOS TENSORIAIS DEPENDENTES DO MOMENTO

Agora aplicaremos na ação (14) a transformação de dualidade:

$$x_\mu \to p_\mu; \qquad p_\mu \to -x_\mu . \tag{21}$$

Esta torna invariante a definição dos parênteses de Poisson

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial B}{\partial p_\mu} - \frac{\partial A}{\partial p_\mu}\frac{\partial B}{\partial x^\mu} \tag{22}$$

de duas funções *A* e *B* das variáveis canônicas. Sob a transformação (21), a ação (14) se torna

$$S = \int d\tau \left(-x_\mu \dot{p}^\mu - \frac{1}{2}\lambda g_{\mu\nu}(p) x^\mu x^\nu \right), \tag{23}$$

onde a Hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{1}{2}\lambda g_{\mu\nu}(p) x^\mu x^\nu . \tag{24}$$

A equação de movimento para a $\lambda(\tau)$, nos fornece o vínculo

$$\phi = \frac{1}{2}\lambda g_{\mu\nu}(p) x^\mu x^\nu \approx 0 , \tag{25}$$

que exigindo a estabilidade deste, teremos

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = \lambda\{\phi,\phi\} = 0 . \tag{26}$$

O vinculo (25) gera as seguintes transformações locais

$$\delta x_\mu = \varepsilon(\tau)\{x_\mu, \phi\} = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial g_{\alpha\beta}(p)}{\partial p^\mu} x^\alpha x^\beta \tag{27.a}$$

e

$$\delta p_\mu = \varepsilon(\tau)\{p_\mu, \phi\} = -\varepsilon g_{\mu\alpha}(p) x^\alpha , \tag{27.b}$$

pelas quais, fazendo novamente $\delta\lambda = \dot{\varepsilon}$ em (18.c):

$$\delta S = \int d\tau \frac{d}{d\tau}(\varepsilon\phi) . \tag{27.c}$$

Obtemos uma ação invariante e a carga de Noether Hamiltoniana conservada para o campo tensorial $g_{\mu\nu}(p)$ é a quantidade

$$Q = \varepsilon\phi = \frac{1}{2}\varepsilon g_{\mu\nu}(p)x^{\mu}x^{\nu}\,. \tag{28}$$

É fácil notar que as transformações de simetria local (27) e a carga correspondente (28) podem ser obtidas de (18) e (19) utilizando a transformação de dualidade (21).

As equações Hamiltonianas de movimento na presença do campo $g_{\mu\nu}(p)$ são

$$\dot{x}_{\mu} = \{x_{\mu}, H\} = \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial g_{\alpha\beta}(p)}{\partial p^{\mu}}x^{\alpha}x^{\beta} \tag{29.a}$$

e

$$\dot{p}_{\mu} = \{p_{\mu}, H\} = -\lambda g_{\mu\alpha}(p)x^{\alpha}\,, \tag{29.b}$$

que também podem ser obtidas das equações de movimento (20) utilizando a transformação (21).

5. CONCLUSÃO

A transformação de dualidade (21) relaciona duas descrições Hamiltonianas duais do movimento da partícula sem massa na presença de campos tensoriais no espaço de fase. Utilizando o método Hamiltoniano de Dirac fomos capazes de relacionar as simetrias locais e as equações de movimento de duas descrições equivalentes. Definimos, então, os pré-requisitos para a construção de uma teoria quântica que incorpora a dualidade onda-partícula na presença de uma interação gravitacional.

---

1. BALASUBRAMANIAN, V.; BOER, J.; EL-SHOWK, S.; MESSAMAH, I. Black Holes as Effective Geometries. *Class. Quant. Grav.*, 25, 214004 (2008).
2. CHAGAS FILHO, W. F. 2T Physics, Scale Invariance and Topological Vector Fields. *International Journal of Theoretical Physics*, 47, 1571 (2008). *arXiv:hep-th*, 0706.0532 (2007).
3. CHAGAS FILHO, W. F.; ALMEIDA, G. M. A. Espaço-tempo não comutativo e o quantum de área. *Scientia Plena,* 4, 114806 (2008).
4. DIRAC, P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva University (1964).
5. GOLDSTEIN, H. Classical Mechanics. 1st Ed. Addison-Wesley Publishing Company (1980).
6. KAKU, M. Introduction to Superstrings. New York: Springer (1988).