

Gravitação Dual de Cordas Relativísticas

G. M. A. Almeida & W. F. Chagas Filho

Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-SE, Brasil

guilherme_fisica@hotmail.com

(Recebido em 01 de setembro de 2009; aceito em 01 de novembro de 2009)

Um dos principais problemas na física teórica moderna é a construção de uma descrição quantizada da interação gravitacional partindo da relatividade geral. Estudos recentes na física de buracos negros mostram que este problema pode ser solucionado incorporando na teoria de gravitação a dualidade onda-partícula, o que leva a uma quantização no espaço de fase. Neste trabalho, aplicaremos essa dualidade em teoria de cordas relativísticas sem tensão, sendo estas uma extensão com mais dimensões do conceito de partícula. Vamos demonstrar utilizando o método de Dirac de incorporar vínculos Hamiltonianos ao sistema, que a dualidade onda-partícula relaciona a simetria local da corda relativística e as equações de movimento na presença de campos tensoriais dependentes da posição com a simetria local e as equações de movimento na presença de campos tensoriais dependentes do momento, surgindo, então, uma gravitação dual de cordas relativísticas.

Palavras-chave: cordas relativísticas, dualidade, campos tensoriais.

One of the main problems in modern theoretical physics is the formulation of a quantized description of gravitational interaction from general relativity. Recent developments in black hole physics show that this problem may be solved by incorporating the wave-particle duality in the gravitational theory which leads to a quantization in phase space. In this paper, we will apply this duality in tensionless relativistic strings theory as being a higher dimensional extension of the particle concept. We will show, by using the Dirac method of incorporating Hamiltonians constraints to the system, that the wave-particle duality relates the string's local symmetry and equations of motion in presence of position dependent tensorial fields with local symmetry and equations of motion in presence of momentum dependent tensorial fields allowing the emerging of a dual gravitation of relativistic strings.

Keywords: relativistic strings, duality, tensorial fields.

1. INTRODUÇÃO

De acordo com a teoria de cordas, todas as partículas observadas na natureza correspondem a diferentes modos vibracionais de um objeto unidimensional, a corda. Esta teoria pode ser usada como uma alternativa para a descrição da gravidade quântica.

Nosso objetivo é construir uma ação Hamiltoniana para uma corda bosônica relativística fechada sem tensão e aplicar a dualidade onda-partícula verificando as simetrias locais existentes e a estabilidade dinâmica da teoria. Cordas com tensão possuem o problema da dimensão crítica, porém, não há uma demonstração com invariância de gauge que cordas com tensão nula também tenham este problema. Além do mais, cordas sem tensão definem uma teoria com invariância global conforme num espaço-tempo com d dimensões.

2. CORDAS RELATIVÍSTICAS SEM TENSÃO

Uma corda bosônica se propagando num espaço de Minkowski pode ser descrita pela ação de Nambu-Goto

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}, \quad (1)$$

que nos fornece a área da “folha de universo” deixada pela corda. Temos que $x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma)$, $g = \det g_{ab}$ é o determinante da métrica induzida $g_{ab} = \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \eta_{\mu\nu}$ com

$a, b = 0, 1 = \tau, \sigma$ e T é a tensão da corda. Na transição para o formalismo Hamiltoniano, a ação (1) nos fornece o momento canônico

$$p_\mu = -T \sqrt{-g} g^{0a} \partial_a x_\mu \quad (2)$$

e uma Hamiltoniana nula, $H = 0$. Do momento (2) obtemos os vínculos

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (p^2 + T^2 x'^2) \approx 0 \quad (3)$$

e

$$\phi_2 = p_\mu x'^\mu \approx 0, \quad (4)$$

onde $x'^\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma}$. Estamos seguindo a convenção de Dirac onde o vínculo só é considerado zero após os cálculos serem realizados. Por isto escrevemos \approx que significa uma igualdade “fraca”. Dizemos então que os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 são “fracamente” nulos. A Hamiltoniana estendida de Dirac para a corda é dada por

$$H_E = \frac{1}{2} \lambda_1 (p^2 + T^2 x'^2) + \lambda_2 p_\mu x'^\mu, \quad (5)$$

onde λ_1 e λ_2 são multiplicadores de Lagrange. Podemos então escrever a ação Hamiltoniana

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau d\sigma [p_\mu \dot{x}^\mu - H_E] \\ &= \int d\tau d\sigma \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} \lambda_1 (p^2 + T^2 x'^2) - \lambda_2 p_\mu x'^\mu \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Fazendo $T = 0$ na ação (6) obteremos a ação para a corda sem tensão

$$S = \int d\tau d\sigma \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} \lambda_1 p^2 - \lambda_2 p_\mu x'^\mu \right], \quad (7)$$

onde a Hamiltoniana é

$$H = \int d\sigma \left[\frac{1}{2} \lambda_1 p^2 + \lambda_2 p_\mu x'^\mu \right]. \quad (8)$$

As equações de movimento para os multiplicadores de Lagrange λ_i ($i = 1, 2$) da ação (7) fornecem os vínculos de primeira classe:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} p^2 \approx 0; \quad \phi_2 = p_\mu x'^\mu \approx 0. \quad (9)$$

Introduzindo os parênteses de Poisson

$$\{x_\mu, x_\nu\} = 0, \quad \{p_\mu, p_\nu\} = 0, \quad \{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu}, \quad (10)$$

e requerendo a estabilidade [4] dos vínculos (9)

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H\} = \int d\sigma' \lambda_j \{\phi_i(\sigma), \phi_j(\sigma')\} = 0, \quad (11)$$

obtemos as relações:

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_1(\sigma')\} = 0, \quad (12.a)$$

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_2(\sigma')\} = -2\phi_1(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (12.b)$$

e

$$\{\phi_2(\sigma), \phi_2(\sigma')\} = 2\phi_2(\sigma') \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (12.c)$$

As equações (12) mostram que os vínculos (9) são dinamicamente estáveis e geram as transformações locais com parâmetro arbitrário $\varepsilon_i(\tau, \sigma)$:

$$\begin{aligned} \delta x_\mu &= \varepsilon_i \{x_\mu, \phi_i\} \\ &= (\varepsilon_1 p_\mu + \varepsilon_2 x'_\mu) \delta(\sigma - \sigma'); \end{aligned} \quad (13.a)$$

$$\begin{aligned} \delta p_\mu &= \varepsilon_i \{p_\mu, \phi_i\} \\ &= \varepsilon_2 p_\mu \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (13.b)$$

De acordo com (13), a ação (7) se transforma como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int d\tau d\sigma [(\varepsilon_1 \lambda'_2 + \varepsilon_2 \lambda'_1 - \varepsilon'_1 \lambda_2 - \varepsilon'_2 \lambda_1) \phi_1 \\ &+ (\varepsilon_2 \lambda'_2 + \varepsilon'_2 \lambda_2) \phi_2 + \frac{d}{d\tau} (\varepsilon_i \phi_i) + \dot{\varepsilon}_i \phi_i - \phi_i \delta \lambda_i]. \end{aligned} \quad (13.c)$$

Utilizamos as equações de vínculo (9) podemos escrever

$$\delta \mathcal{S} \approx \int d\tau d\sigma \left[\frac{d}{d\tau} (\varepsilon_i \phi_i) + \dot{\varepsilon}_i \phi_i - \phi_i \delta \lambda_i \right], \quad (13.d)$$

e se escolhermos $\delta \lambda_i = \dot{\varepsilon}_i$, a variação (13.d) reduz para

$$\delta \mathcal{S} \approx \int d\tau d\sigma \frac{d}{d\tau} (\varepsilon_i \phi_i). \quad (13.e)$$

Da variação (13.e) vemos que a carga de Noether conservada é a quantidade

$$Q = \int d\sigma \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 p_\mu x'^\mu \right). \quad (14)$$

A Hamiltoniana (8) gera as equações de movimento

$$\dot{x}_\mu = \{x_\mu, H\} = \lambda_1 p_\mu + \lambda_2 x'_\mu \quad (15.a)$$

e

$$\dot{p}_\mu = \{p_\mu, H\} = \lambda_2' p_\mu + \lambda_2 p'_\mu. \quad (15.b)$$

Para chegar às equações de movimento (15) nós identificamos um termo de contorno nas duas extremidades da corda. Conseqüentemente, estamos tratando de cordas fechadas sem tensão.

3. CAMPOS TENSORIAIS DEPENDENTES DA POSIÇÃO

Agora vamos introduzir um campo tensorial dependente da posição $g_{\mu\nu}(x)$ e escrever a ação para a corda

$$S = \int d\tau d\sigma \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} \lambda_1 g_{\mu\nu}(x) p^\mu p^\nu - \lambda_2 g_{\mu\nu}(x) p^\mu x'^\nu \right], \quad (16)$$

onde a Hamiltoniana é

$$H = \int d\sigma \left[\frac{1}{2} \lambda_1 g_{\mu\nu}(x) p^\mu p^\nu + \lambda_2 g_{\mu\nu}(x) p^\mu x'^\nu \right]. \quad (17)$$

As equações de movimento para as variáveis λ_i ($i=1,2$) fornecem os vínculos de primeira classe:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) p^\mu p^\nu \approx 0; \quad \phi_2 = g_{\mu\nu}(x) p^\mu x'^\nu \approx 0. \quad (18)$$

Requerendo a condição de estabilidade dinâmica (11) para os vínculos (18) e utilizando a Hamiltoniana (17), obtemos as relações

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_1(\sigma')\} = 0, \quad (19.a)$$

$$\begin{aligned} \{\phi_1(\sigma), \phi_2(\sigma')\} &= g_{\mu\nu}(x) x'^\mu \frac{\partial \phi_1}{\partial x_\nu} \delta(\sigma - \sigma') \\ &- g_{\mu\nu}(x) p^\mu \frac{\partial \phi_2}{\partial x_\nu} \delta(\sigma - \sigma') - 2\phi_1 \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (19.b)$$

e

$$\{\phi_2(\sigma), \phi_2(\sigma')\} = 2\phi_2\delta(\sigma - \sigma'). \quad (19.c)$$

Para satisfazer a condição de estabilidade dinâmica para os vínculos (18) devemos impor as condições:

$$g_{\mu\nu}(x)x'^{\mu} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{\nu}} \approx 0; \quad g_{\mu\nu}(x)p^{\mu} \frac{\partial\phi_2}{\partial x_{\nu}} \approx 0. \quad (20)$$

Quando as condições (20) são satisfeitas, os vínculos (18) se tornam dinamicamente estáveis.

Os vínculos (18) geram as transformações locais

$$\begin{aligned} \delta x_{\mu}(\sigma) &= \varepsilon_i \{x_{\mu}, \phi_i\} \\ &= [\varepsilon_1 g_{\mu\nu}(x)p^{\nu} + \varepsilon_2 g_{\mu\nu}(x)x'^{\nu}] \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (21.a)$$

e

$$\begin{aligned} \delta p_{\mu}(\sigma) &= \varepsilon_i \{p_{\mu}, \phi_i\} \\ &= \left[-\frac{1}{2} \varepsilon_1 \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\mu}} p^{\alpha} p^{\beta} \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\mu}} p^{\alpha} x'^{\beta} \right] \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + \varepsilon_2 g_{\mu\alpha}(x) p^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \quad (21.b)$$

fazendo a ação (16) variar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d\tau d\sigma \left[2(\varepsilon_1 \lambda_2 + \varepsilon_2 \lambda_1) g_{\mu\nu} x'^{\mu} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{\nu}} + (\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2) g_{\mu\nu} p^{\mu} \frac{\partial\phi_2}{\partial x_{\nu}} \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon_1 \lambda_2' + \varepsilon_2 \lambda_1' - \varepsilon_1' \lambda_2 - \varepsilon_2' \lambda_1) \phi_1 + (\varepsilon_2 \lambda_2' + \varepsilon_2' \lambda_2) \phi_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{d\tau} (\varepsilon_i \phi_i) + \dot{\varepsilon}_i \phi_i - \phi_i \delta \lambda_i \right]. \end{aligned} \quad (21.c)$$

Utilizando os vínculos (18) e as condições (20) podemos escrever (21.c) como

$$\delta S \approx \int d\tau d\sigma \left[\frac{d}{d\tau} (\varepsilon_i \phi_i) + \dot{\varepsilon}_i \phi_i - \phi_i \delta \lambda_i \right], \quad (21.d)$$

e se escolhermos novamente $\delta \lambda_i = \dot{\varepsilon}_i$, obtemos

$$\delta S \approx \int d\tau d\sigma \frac{d}{d\tau} (\varepsilon_i \phi_i). \quad (21.e)$$

Então, encontramos a partir de (21.e), a carga de Noether conservada correspondente às transformações de simetria local (21) de cordas fechadas sem tensão no campo tensorial $g_{\mu\nu}(x)$ é a quantidade

$$Q = \int d\sigma \varepsilon_i \phi_i = \int d\sigma \left[\frac{1}{2} \varepsilon_1 g_{\mu\nu}(x) p^\mu p^\nu + \varepsilon_2 g_{\mu\nu}(x) p^\mu x'^\nu \right]. \quad (22)$$

A Hamiltoniana (17) nos fornece as equações de movimento

$$\dot{x}_\mu = \{x_\mu, H\} = \lambda_1 g_{\mu\alpha}(x) p^\alpha + \lambda_2 g_{\mu\alpha}(x) x'^\alpha \quad (23.a)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{p}_\mu = \{p_\mu, H\} = & -\frac{1}{2} \lambda_1 \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\mu} p^\alpha p^\beta \\ & - \lambda_2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\mu} p^\alpha x'^\beta + \lambda_2' g_{\mu\alpha} p^\alpha \\ & + \lambda_2 \frac{\partial g_{\mu\alpha}(x)}{\partial x^\nu} x'^\nu p^\alpha + \lambda_2 g_{\mu\alpha} p'^\alpha. \end{aligned} \quad (23.b)$$

4. CAMPOS TENSORIAIS DEPENDENTES DO MOMENTO

Introduzindo as transformações de dualidade:

$$x_\mu \rightarrow p_\mu; \quad p_\mu \rightarrow -x_\mu; \quad (24.a)$$

$$\lambda_1 \rightarrow \lambda_1; \quad \lambda_2 \rightarrow -\lambda_2. \quad (24.b)$$

Se aplicarmos (24) na ação da corda sem tensão (16) obtemos a ação dual

$$S = \int d\tau d\sigma \{ -x_\mu \dot{p}^\mu - [\frac{1}{2} \lambda_1 g_{\mu\nu}(p) x^\mu x^\nu + \lambda_2 g_{\mu\nu}(p) x^\mu p'^\nu] \}, \quad (25)$$

onde a Hamiltoniana é

$$H = \int d\sigma \left[\frac{1}{2} \lambda_1 g_{\mu\nu}(p) x^\mu x^\nu + \lambda_2 g_{\mu\nu}(p) x^\mu p'^\nu \right]. \quad (26)$$

As equações de movimento para os multiplicadores de Lagrange fornecem os vínculos:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(p) x^\mu x^\nu \approx 0; \quad \phi_2 = g_{\mu\nu}(p) x^\mu p'^\nu \approx 0. \quad (27)$$

Requerendo a condição de estabilidade dinâmica

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H\} = \int d\sigma' \lambda_i \{\phi_i(\sigma), \phi_j(\sigma')\} = 0, \quad (28)$$

obtemos as relações

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_1(\sigma')\} = 0, \quad (29.a)$$

$$\begin{aligned} \{\phi_1(\sigma), \phi_2(\sigma')\} &= -g_{\mu\nu}(p) p'^{\mu} \frac{\partial \phi_1}{\partial p_\nu} \delta(\sigma - \sigma') \\ &+ g_{\mu\nu}(p) x^\mu \frac{\partial \phi_2}{\partial p_\nu} \delta(\sigma - \sigma') - 2\phi_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (29.b)$$

e

$$\{\phi_2(\sigma), \phi_2(\sigma')\} = -2\phi_2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (29.c)$$

Para satisfazer a condição de estabilidade dinâmica (28) para os vínculos (27) devemos impor as condições:

$$g_{\mu\nu}(p) p'^{\mu} \frac{\partial \phi_1}{\partial p_\nu} \approx 0; \quad g_{\mu\nu}(p) x^\mu \frac{\partial \phi_2}{\partial p_\nu} \approx 0. \quad (30)$$

Quando as condições (30) são satisfeitas, os vínculos (27) se tornam dinamicamente estáveis de primeira classe.

Os vínculos (27) geram as transformações locais

$$\begin{aligned} \delta x_\mu &= \left[\frac{1}{2} \varepsilon_1 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial p^\mu} x^\alpha x^\beta + \varepsilon_2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial p^\mu} x^\alpha p'^{\beta} \right] \delta(\sigma - \sigma') \\ &- \varepsilon_2 g_{\mu\alpha} x^\alpha \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (31.a)$$

e

$$\delta p_\mu(\sigma) = -[\varepsilon_1 g_{\mu\alpha} x^\alpha + \varepsilon_2 g_{\mu\alpha} p'^{\alpha}] \delta(\sigma - \sigma'), \quad (31.b)$$

pelas quais a ação (25) se transforma como

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d\tau d\sigma \left[-2(\varepsilon_1 \lambda_2 + \varepsilon_2 \lambda_1) g_{\mu\nu} p'^{\mu} \frac{\partial \phi_1}{\partial p_\nu} - (\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2) g_{\mu\nu} x^\mu \frac{\partial \phi_2}{\partial p_\nu} \right. \\ &+ (\varepsilon_1 \lambda'_2 + \varepsilon_2 \lambda'_1 - \varepsilon'_1 \lambda_2 - \varepsilon'_2 \lambda_1) \phi_1 + (\varepsilon_2 \lambda'_2 - \varepsilon'_2 \lambda_2) \phi_2 \\ &\left. + \frac{d}{d\tau} (\varepsilon_i \phi_i) + \dot{\varepsilon}_i \phi_i - \phi_i \delta \lambda_i \right], \end{aligned} \quad (31.c)$$

onde, usando as condições (30) e os vínculos (27) obtemos novamente (21.d) e (21.e) caso $\delta\lambda_i = \dot{\varepsilon}_i$. Vemos que a que a carga de Noether conservada correspondente para as cordas fechadas sem tensão no campo tensorial $g_{\mu\nu}(p)$ é a quantidade

$$Q = \int d\sigma \varepsilon_i \phi_i = \int d\sigma \left[\frac{1}{2} \varepsilon_1 g_{\mu\nu}(x) x^\mu x^\nu + \varepsilon_2 g_{\mu\nu}(p) x^\mu p'^\nu \right]. \quad (32)$$

A Hamiltoniana (26) gera as equações de movimento

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu = \{x_\mu, H\} &= \frac{1}{2} \lambda_1 \frac{\partial g_{\alpha\beta}(p)}{\partial p^\mu} x^\alpha x^\beta \\ &+ \lambda_2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}(p)}{\partial p^\mu} x^\alpha p'^\beta - \lambda_2' g_{\mu\alpha} x^\alpha \\ &- \lambda_2 \frac{\partial g_{\mu\alpha}(p)}{\partial p^\nu} p'^\nu x^\alpha - \lambda_2 g_{\mu\alpha} x'^\alpha \end{aligned} \quad (33.a)$$

e

$$\dot{p}_\mu = \{p_\mu, H\} = -\lambda_1 g_{\mu\alpha}(p) x^\alpha - \lambda_2 g_{\mu\alpha}(p) p'^\alpha. \quad (33.b)$$

Notamos que se aplicarmos a transformação de dualidade (24) nas equações de movimento (33) elas se transformam em (23).

5. CONCLUSÃO

A transformação de dualidade (24) relaciona duas descrições Hamiltonianas duais do movimento da corda relativística fechada sem tensão na presença de campos tensoriais no espaço de fase. Utilizando o método Hamiltoniano de Dirac fomos capazes de relacionar as simetrias locais e as equações de movimento de duas descrições equivalentes. Estabelecemos assim as condições iniciais para a construção de uma mecânica quântica que incorpora a dualidade onda-partícula na presença da interação gravitacional.

-
1. BALASUBRAMANIAN, V.; BOER, J.; EL-SHOWK, S.; MESSAMAH, I. Black Holes as Effective Geometries. *Class. Quant. Grav.*, 25, 214004 (2008).
 2. CHAGAS FILHO, W. F. 2T Physics, Scale Invariance and Topological Vector Fields. *International Journal of Theoretical Physics*, 47, 1571 (2008). *arXiv:hep-th*, 0706.0532 (2007).
 3. CHAGAS FILHO, W. F.; ALMEIDA, G. M. A. Espaço-tempo não comutativo e o quantum de área. *Scientia Plena*, 4, 114806 (2008).
 4. DIRAC, P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva University (1964).
 5. GOLDSTEIN, H. Classical Mechanics. 1st Ed. Addison-Wesley Publishing Company (1980).
 6. KAKU, M. Introduction to Superstrings. New York: Springer (1988).