

# Estudos sobre o Ensemble de Wishart de matrizes aleatórias

Felippe O. S. Almeida & André M. C. Souza

*Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristovao SE, Brasil*

*felippebuxa@hotmail.com*

*(Recebido em 8 de maio de 2009; aceito em 31 de maio de 2009)*

---

As Matrizes Aleatórias do tipo Wishart, compostas de elementos reais e independentes que seguem a distribuição de Tsallis, são estudadas numericamente. Para índices entrópicos  $1 < q < 5/3$  foi possível mostrar que tais matrizes caem na mesma classe de universalidade do conjunto gaussiano de Wishart.

Palavras-chave: matrizes aleatórias, Wishart, distribuição de Tsallis, autovalores

The type of Wishart Random Matrices, composed of real and independent elements following the Tsallis's distribution is studied numerically. For the entropic index  $1 < q < 5/3$  it was possible to show that such matrices fall in the same universality class of the Gaussian-Wishart set.

Keywords: random matrices, Wishart, Tsallis's distributions, eigenvalues

---

## 1. INTRODUÇÃO

As Matrizes Aleatórias foram descobertas na década de 30, mas somente na década de 50 tiveram uma importância maior[1]. Com a descoberta dos sistemas caóticos e de outros sistemas sem soluções triviais, estudos mais aprofundados foram surgindo sobre a teoria das matrizes aleatórias. Tendo em vista a importância dos autovalores e dos autovetores, estudam-se essas matrizes diagonalizando e observando o comportamento dos mesmos.

Utilizando a distribuição de Tsallis e construindo os elementos dessas matrizes aleatoriamente, pode-se analisar o comportamento dos seus autovalores e dos espaçamentos entre níveis vizinhos. Considerando esse comportamento para  $-\infty < q < 5/3$  observa-se algumas mudanças que serão vistas mais a seguir.

Para o estudo sobre Ensemble de Wishart, usaremos as matrizes designadas por Wishart, na forma  $G^T G$ , onde  $G$  é uma matriz retangular aleatória. Assim poderemos observar o comportamento da distribuição dos autovalores e compararmos com os nossos resultados.

## 2. MATRIZES ALEATÓRIAS

As Matrizes Aleatórias (MA) surgiram na matemática na década de 1930, mas não atraíram muita importância [2]. Somente na década de 1950, através do físico e matemático Eugene Paul Wigner (1902-1995), inventor da Teoria das Matrizes Aleatórias (TMA), elas começaram a ser estudadas mais a fundo. Ele percebeu que a distribuição da densidade de autovalores, obtida através da diagonalização dessas matrizes, em que os elementos eram determinados aleatoriamente e sujeitos a uma distribuição gaussiana, coincidia com a estatística das flutuações dos níveis de átomos pesados, conseguidos experimentalmente [3].

Como sistemas caóticos têm um comportamento aleatório, nada melhor que tratá-los com uma solução aleatória também. Então Metha[2], considerando uma matriz de ordem  $N$  grande ( $N \gg 1$ ), cujos elementos são escolhidos aleatoriamente com uma determinada lei de probabilidade, propõe uma pergunta muito importante sobre os seus autovalores e autovetores: Como estudaremos as probabilidades dos seus determinados autovetores e autovalores? Essa pergunta é de total importância para o entendimento de como se comporta estatisticamente a ressonância de um nêutron lento na física nuclear.

Para tratarmos desses sistemas que utilizam MA, como também da sua solução, devemos descrever uma matriz  $H$ , cujos elementos devem ser selecionados aleatoriamente, ser

necessariamente hermitiana e ter seus autovalores reais. A ordem dessa matriz H depende do sistema considerado.

Um Ensemble [4] de matriz aleatória muito importante é o Gaussiano Ortogonal (GOE) no qual um conjunto de matrizes simétricas com elementos reais e estatisticamente independentes obedece a uma distribuição gaussiana de probabilidades. Assim, para este caso e, considerando matrizes muito grandes, vemos que a densidade de autovalores segue a lei do semicírculo,

$$\rho(E) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma} \left[ 1 - \left( \frac{E}{2\sigma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} & \text{se } |E| < 2\sigma, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

em que  $\sigma$  representa a largura da distribuição gaussiana associada com os elementos da matriz.

Arrumando os autovalores em ordem crescente, definimos a diferença entre esses autovalores ( $s_i = E_i - E_{i-1}$ ) de espaçamento de níveis. A distribuição de probabilidade de espaçamentos dos autovalores de uma matriz aleatória é bem parecida com “chute de Wigner” como vemos a seguir

$$P(s) = \frac{\pi s}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4\sigma^2}\right). \quad (2)$$

### 3. DISTRIBUIÇÃO DE TSALLIS E MATRIZES ALEATÓRIAS

Como já estudamos o ensemble Gaussiano e vimos como se comporta a distribuição dos autovalores e a distribuição dos espaçamentos, agora faremos a análise dos mesmos, mas com uma nova distribuição de probabilidades que é composto por distribuições conseguidas por meio da otimização da entropia de Tsallis, caracterizada pelo índice entrópico  $q$ , onde  $q$  é um numero real [4]. Para  $q$  localizado no intervalo entre  $]-\infty, 1[$ , temos

$$p_q(x) = \begin{cases} \left( \frac{1-q}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \frac{\Gamma[(5-3q)/2(1-q)]}{\Gamma[(2-q)/(1-q)]} \times [1 - (1-q)x^2/2\sigma^2]^{1/(1-q)} & \text{se } |x| < \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1-q}} \\ 0 & \text{qualquer outro} \end{cases} \quad (3)$$

Essas distribuições de Tsallis também são conhecidas como  $q$ -Gaussianas porque podemos retirar delas a distribuição Gaussiana, que obtemos quando  $q \rightarrow 1$ . O segundo momento da distribuição  $p_q(x)$  pode ser dado por

$$\langle x^2/\sigma^2 \rangle = \begin{cases} [2/(5-3q)] & \text{se } q < \frac{5}{3} \\ \infty & \text{se } q \geq \frac{5}{3} \end{cases} \quad (4)$$

Considerando que  $q$  tem uma variação finita, ou seja,  $-\infty < q < 5/3$ .

Agora, substituindo  $\sigma$  por  $\sigma/\sqrt{N}$  na equação (3), o segundo momento da equação (4) fica  $\langle x^2/\sigma^2 \rangle = 2/[N(5-3q)]$ . Neste caso, a densidade de autovalores é

$$p_q(E) = \frac{N}{\pi\sigma} \left( \frac{5-3q}{2} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{E}{2\sigma} \right)^2 \frac{5-3q}{2} \right]^{1/2} \quad \text{para } -\infty < q < \frac{5}{3} \quad (5)$$

E a lei semicircular do ensemble Gaussiano da equação (1) ficará

$$\frac{p_q(\hat{E})}{N[(5-3q)/2]^{1/2}} = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma} \left[ 1 - \left( \frac{\hat{E}}{2\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} & \text{se } |\hat{E}| \leq 2\sigma \\ 0 & \text{qualquer outro} \end{cases} \quad (6)$$

onde  $\hat{E} = E[(5-3q)/2]^{1/2}$ .

Para reobter as densidade de autovalores estudadas por Nobre & Souza[4] utilizamos  $N = 50 (N_s = 20000)$ ,  $N = 100 (N_s = 20000)$  e  $N = 200 (N_s = 10000)$ . Mostraremos que é possível analisar o limite assintótico de matrizes muito grandes, mesmo utilizando esses N pequenos e veremos que o comportamento das nossas matrizes segue os resultados obtidos por Nobre & Souza.

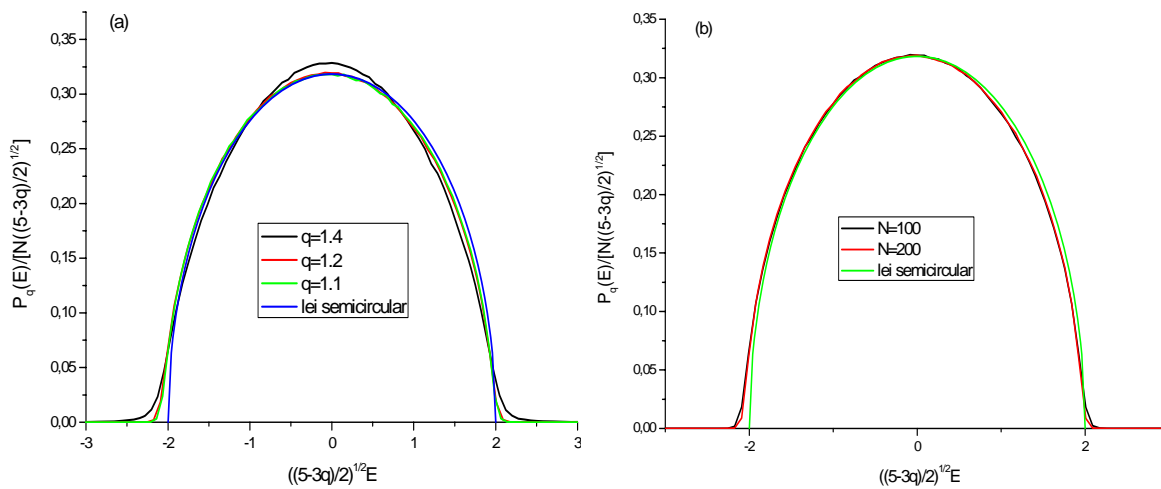


Figura 1: Densidade de autovalores de matrizes  $(N \times N)$  aleatórias  $q$ -gaussianas, para: (a)  $N = 100$  fixo, para  $-\infty < q < 5/3$ ; (b)  $q = 1.2$  fixo

A figura 1 a densidade de autovalores das  $q$ -gaussianas e demonstra que o algoritmo usado confirma os resultados da literatura. A figura 1(a) mostra esses resultados para  $N=100$  fixo e três valores diferentes de  $q$ . A figura 1(b) mostra essa densidade de autovalores com um  $q=1.2$  fixo e dois valores diferentes de  $N$ .

Analisaremos, também, o comportamento de  $p_q(E)$  no intervalo  $5/3 < q < 2$ . Nesse caso, o comportamento da curva varia quando variamos o  $q$ , mas sabe-se que esse comportamento diferente já foi observado em alguns outros trabalhos. Entretanto, para uma mesmo  $q$  e variando o  $N$  percebemos que o comportamento continua parecido. A figura 2 mostra a densidade de autovalores para  $5/3 < q < 2$  e mostra também que a curva não se altera quando mudamos o  $N$ .

#### 4. MATRIZES WISHART

Consideramos Wigner como o criador da TMA porque foi com ele que essa teoria engrenou na física. Porém, 20 anos antes (na década de 1930) do trabalho de Wigner sobre MA, Wishart já tinha analisado MA na forma de  $G^T G$ , onde  $G$  é uma matriz retangular aleatória com os seus elementos reais e de tamanho  $N \times M$ , podendo ser  $N$  e  $M$  finitos e muito grandes, para uma melhor aproximação do estudo [5-8].

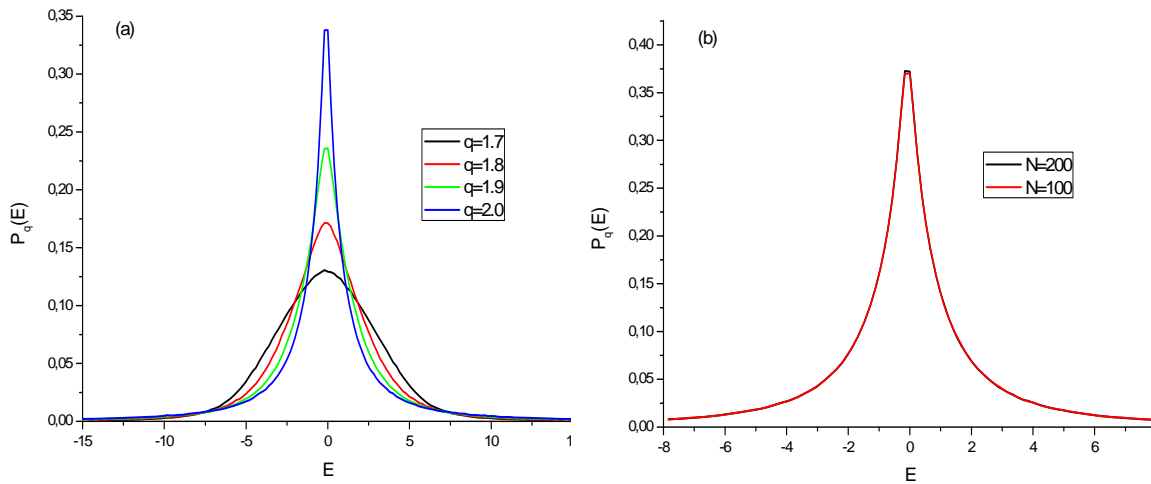


Figura 2: Distribuição de autovalores de matrizes  $(N \times N)$  aleatórias  $q$ -gaussianas: (a)  $N = 100$  fixo, para  $5/3 < q < 2$ ; (b)  $q = 2.0$  fixo

As matrizes de Wishart são construídas na determinada forma  $W = G^T G$ , sendo  $G$  uma matriz  $N \times M$  e sua transposta uma matriz  $M \times N$ , logo  $W$  será uma matriz quadrada  $N \times N$ . Ela sendo quadrada podemos agora diagonalizar para achar os seus autovalores e analisarmos o seu comportamento.

A seguir, mostraremos como se comporta essa densidade [6,9]:

$$p_w(E) = \max\left(0, 1 - \frac{1}{a}\right) \delta(E) + \frac{1}{2\pi E a} \sqrt{(b_+ - E)(E - b_-)} \tag{7}$$

onde  $b_{\pm} = (1 \pm \sqrt{a})^2$  e  $a = N/M$ . Para  $0 < a \leq 1$  a equação (7) ficará

$$p_w(E) = \frac{\sqrt{(b_+ - E)(E - b_-)}}{2\pi E a}, \tag{8}$$

A figura 3, abaixo, mostra a densidade de autovalores das matrizes aleatórias de Wishart para  $a = 1, a = 0.5, a = 0.25$  e  $a = 0.125$ , para podermos observar as diferentes distribuições.

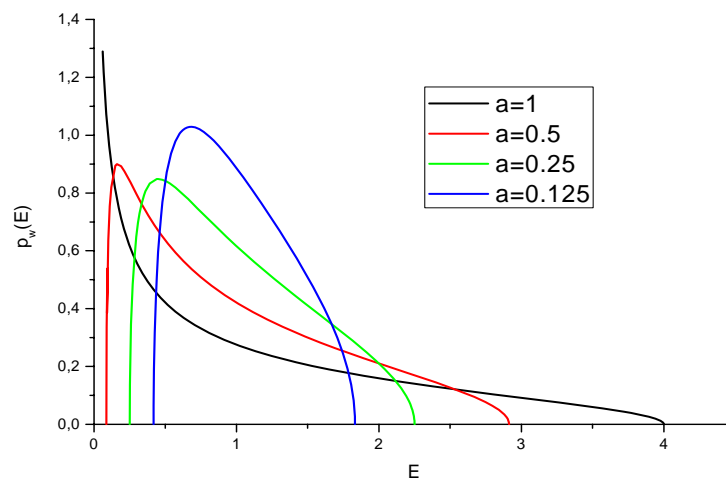


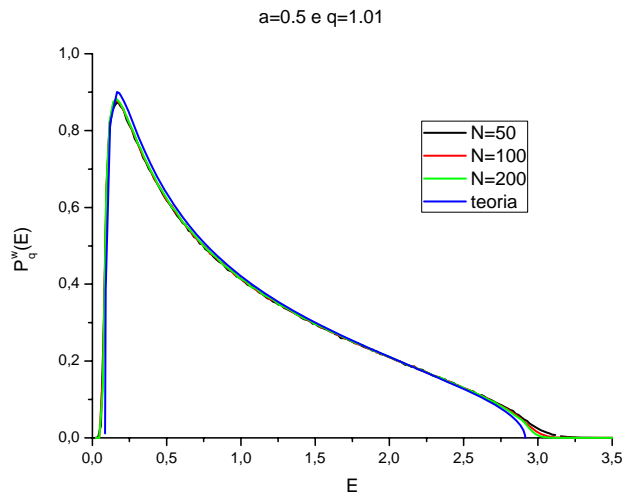
Figura 3: Densidade de autovalores de matrizes aleatórias de Wishart para  $a = 1, a = 0.5, a = 0.25$  e  $a = 0.125$

## 5. MATRIZES WISHART-TSALLIS

Depois de ter mostrado as Matrizes aleatórias, a distribuição de Tsallis e as matrizes de Wishart, vimos que cada um separadamente pode ser utilizada para aplicações em algumas áreas da ciência. Faremos agora uma junção dos três assuntos para ver se podemos melhorar a análise dessas áreas, como exemplo na área da economia.

Fizemos um programa na linguagem FORTRAN, que simulava essas matrizes de Wishart ( $W = G^T G$ ), onde  $G$  é uma matriz  $N \times M$  finita, seus elementos são aleatórios e desenvolvidos de acordo com a distribuição de Tsallis. Faremos agora uma análise da distribuição de autovalores para diferentes valores de  $q$  (índice de Tsallis), para diferentes valores de  $a$  (índice de Wishart) e para diferentes valores de  $N$  (que para cada valor de  $N$  relacionado a  $a$  teremos um valor de  $M$ ).

A grande dificuldade dessas análises é que teremos dois índices variáveis ( $a$  e  $q$ ), onde um desses índices ainda depende de  $N$  e  $M$  (também variamos alguns valores). Mas para cada valor de  $N$  nós fizemos  $N_s$  amostras, que correspondem ao número de matrizes do ensemble. Para o cálculo da densidade de autovalores, utilizamos  $N = 50$  ( $N_s = 100000$ ),  $N = 100$  ( $N_s = 50000$ ),  $N = 200$  ( $N_s = 25000$ ) e  $N = 400$  ( $N_s = 2500$ ), mas devemos lembrar que o tamanho de  $M$  dependerá de que  $a$  utilizaremos.



**Figura 4:** Densidade de autovalores de matrizes aleatórias de Wishart-Tsallis para  $a = 0.5$  e  $q = 1.01$

Para nossa análise, utilizaremos  $0 < a < 1$  e  $1 < q \leq 2$  onde mostraremos que também é possível analisar o limite assintótico de matrizes muito grandes. Mesmo utilizando esses  $N$  finitos, veremos que o comportamento das nossas matrizes segue os resultados mostrados no capítulo anterior.

A figura 4 mostra a densidade dos autovalores das matrizes de Wishart-Tsallis para  $q=1.01$ , para diferentes valores de  $N$  e  $a=0.5$ . O algoritmo usado confirma o resultado numérico, onde apresentam os resultados numéricos da densidade de autovalores de Wishart. Observe que mesmo mudando o  $N$  a curva preserva a forma, e quanto maior o valor de  $N$  a curva vai se tornando cada vez mais próxima dos valores teóricos.

A seguir, mostraremos na figura 5 mais um gráfico de densidade de autovalores de matrizes aleatórias de Wishart-Tsallis para  $a=0.5$  e  $N=100$ , mas agora variamos  $q$  para três valores diferentes entre  $1 < q \leq 5/3$  e veremos que a curva tem uma dependência em  $q$ . Em (a), mostraremos os valores obtidos na simulação, e em (b), mostraremos esses valores normalizados. Mas observe que mesmo com a normalização o problema de  $N$  finito ainda continua.

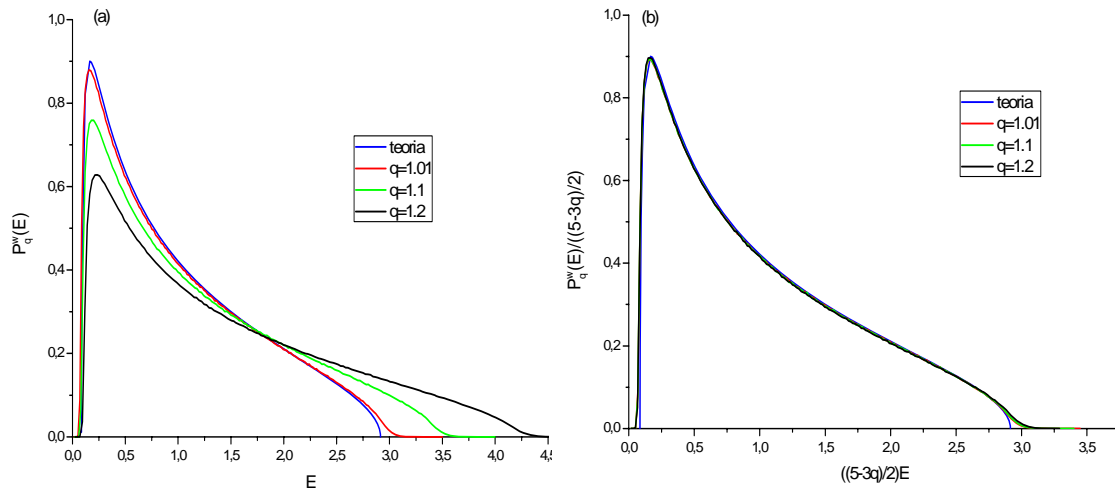


Figura 5: Densidade de autovalores de matrizes aleatórias de Wishart-Tsallis para  $N = 100$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $1 < q < \frac{5}{3}$

Perceba que quando aumentamos o valor de  $q$  a energia  $E_{\max}$  do pico da distribuição de autovalores aumenta e o pico diminui. Outra coisa que mostramos é que mesmo com índices  $q$  diferentes podemos fazer um colapso das curvas conforme pode ser visto na Figura 5, de modo que no intervalo de  $1 < q < 5/3$  a classe de universalidade das matrizes permanece igual a matriz gaussiana de Wishart.

## 6. CONCLUSÃO

Observamos mudanças ocorridas nos gráficos, em decorrência das variações do índice  $q$  das matrizes de Wishart-Tsallis. A dependência em  $q$ , e a não dependência em  $N$ , das matrizes de Wishart-Tsallis, se assemelham com o caso das  $q$ -Gaussianas [4]. Vimos também que o comportamento de  $E_{\max}$  no pico da distribuição de autovalores aumenta e o pico diminui com o aumento de  $q$ . Deixamos em aberto uma perspectiva futura de estudos sobre outros valores do índice  $a$ .

1. M.L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, New York, 2004, 3ª Edition.
2. M.L. Mehta, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*, Academic Press, San Diego, 1991, 2ª Edition.
3. A.C. Bertuola, M.S. Hussein e M.P. Pato, Técnicas e construções de ensembles de matrizes aleatórias e estatísticas correlatas, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 3, p. 333-340, 2006.
4. F. D. Nobre e A. M.C. Souza, *Statistics of the eigenvalues of Tsallis matrices*, *Physica A* 339, 354 – 368, 2004.
5. S. H. Simon e A. L. Moustakas, *Eigenvalue Density of Correlated Complex Random Wishart Matrices*, Lucent Technologies, Bell Labs, Murray Hill, NJ, 07974, 2004.
6. A. Edelman, *The Eigenvalues of Random Matrices Experiments with the Classical Ensembles*, 2005.
7. E. Khan, *Random Matrices, Information Theory and Physics: New Results, New Connections*, 2005.
8. R. A. Janik e M. A. Nowak, *Wishart and anti-Wishart random matrices*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 3629–3637, 2003.
9. P. Vivo, S. N. Majumdar e O. Bohigas, *Large deviations of the maximum eigenvalue in Wishart random matrices*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 4317–4337, 2007.