SCIENTIA PLENA **VOL. 4, NUM. 10** **2008**
www.scientiaplena.org.br

Teoria quântica de invariantes aplicada ao oscilador harmônico forçado dependente do tempo de Caldirola-Kanai

Alberes Lopes de Lima[1] e I. A. Pedrosa[2]

[1] *Colégio Militar do Recife, Departamento de Ensino e Pesquisa do Exército Brasileiro, 50721-420, Recife-PE, Brasil*

[2] *Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Física, 58059-900, João Pessoa-PB, Brasil*

prof.alberes@ig.com.br

(Recebido em 18 de setembro de 2008; aceito em 23 de outubro de 2008)

No presente trabalho, usamos operadores invariantes lineares à luz do método de invariantes dinâmicos para encontrar as soluções exatas da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico forçado dependente do tempo de Caldirola-Kanai em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado. Além disso, construímos soluções do tipo pacotes de ondas Gaussianos e calculamos as flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como o produto da incerteza. Também, mostramos que as flutuações quânticas e a largura do pacote Gaussiano não dependem da força externa.
Palavras-chave: Física. Teoria quântica. Oscilador quântico dependente do tempo.

In this work, we use linear invariants and the dynamical invariant method to obtain exact solutions of the Schrödinger equation for the Caldirola-Kanai time-dependent forced harmonic oscillator in terms of the solutions of a second order ordinary differential equation that describes the amplitude of the classical unforced damped oscillator. Afterwards, we construct Gaussian wave packet solutions and calculate the quantum fluctuations in coordinate and momentum as well as the uncertainty product. It is also shown that the quantum fluctuations and the width of the Gaussian packet do not depend on the external force.
Keywords: Physics. Quantum theory. Time-dependent quantum oscillator.

1. INTRODUÇÃO

Em geral, o que se faz ao procurar descrever um sistema físico do ponto de vista da mecânica quântica, utilizando uma forma particular para o operador Hamiltoniano, é resolver a equação de Schrödinger correspondente. Dentre os sistemas físicos mais estudados, um que tem atraído muita atenção é o oscilador harmônico quântico. O grande interesse nesse tema deve-se ao fato de que ele é exatamente solúvel e tem aplicações em quase todas as áreas da Física. As vibrações dos átomos nos sólidos e circuitos elétricos, vibrações elásticas em membranas e vibrações de moléculas do ar são apenas alguns exemplos de sua manifestação. Neste artigo, estudaremos sistemas dessa natureza. Entretanto, nosso objetivo é investigar osciladores harmônicos que possuam parâmetros com dependência temporal. Em geral, tal dependência é associada à massa e / ou freqüência, conforme será visto mais tarde. Aqui, observamos que soluções da equação de Schrödinger com Hamiltonianos dependentes explicitamente do tempo são possíveis apenas para situações particulares e, via de regra, são difíceis de serem obtidas.

Devido à importância crucial que o oscilador harmônico tem desempenhado na descrição de fenômenos físicos em diversas áreas da Física, não podemos deixar de investigar osciladores harmônicos que contenham parâmetros com dependência temporal. De fato, para dependências associadas à freqüência e / ou à massa, este problema representa o protótipo de um modelo que é exatamente solúvel e que guarda conexões com outras áreas da Física. Como exemplos, podemos citar aplicações em óptica quântica, com Colegrave e Abdalla[1] aplicando-os para descrever a intensidade do campo eletromagnético numa cavidade tipo Fabry-Perot e Brown[2] para analisar o movimento de uma partícula numa armadilha de Paul. Em estudos de gravitação, Lemos e Natividade[3] e Holstein[4] utilizaram osciladores com dependência temporal na freqüência para estudar universos em expansão no modelo de de Sitter. Outras aplicações podem ser vistas nas áreas de física molecular[5] e teoria de campos[6-8].

Segundo Dekker[9] e Um *et al.*[10], foi Bateman que, pela primeira vez, fez a descrição de sistemas dependentes do tempo na formulação Lagrangiana. Bateman construiu uma Lagrangiana com dependência temporal explícita para um oscilador harmônico amortecido. Todavia, sua análise ocorreu num contexto puramente clássico. Só mais tarde é que a descrição no contexto da mecânica quântica para sistemas dissipativos foi investigada num tratamento fenomenológico sob a hipótese de forças não-conservativas. Isto foi feito independentemente por Caldirola[11-12] e Kanai[13], que introduziram no estudo de sistemas não-conservativos um Hamiltoniano dependente do tempo para descrever um oscilador harmônico amortecido. O Hamiltoniano em questão passou a ser conhecido na literatura científica como Hamiltoniano de Caldirola-Kanai. No entanto, esta descrição trouxe dificuldades de caráter conceitual, como, por exemplo, a violação do princípio da incerteza. Porém, trabalhos de Cervero e Villaroel[14], Greenberg[15] e Abdalla[16], por exemplo, revisaram criticamente a suposta inconsistência. Em seu artigo, Greenberg[17] remove tal dificuldade afirmando que o referido Hamiltoniano em verdade descreve um oscilador com freqüência angular constante, mas cuja massa cresce exponencialmente com o tempo. Assim, a introdução de uma massa variável $m(t)=m_0exp(kt)$, na qual m_0 e k representam constantes positivas e t é o tempo, remove a violação do princípio da incerteza. Esse argumento pode ser compreendido na idealização feita por Ray[18]. Este autor idealizou um modelo no qual um balde pendurado por um fio de massa desprezível oscilava harmonicamente sob uma chuva e a água da chuva ao cair dentro do balde aumentava sua massa. Supondo que o incremento de massa com o tempo variasse com a expressão acima, ele mostrou que o Hamiltoniano não descrevia um sistema com dissipação, mas sim um sistema de massa $m(t)=m_0exp(kt)$, que se move num potencial $exp(kt)\ V(x)$.

Ao longo dos anos, vários autores obtiveram soluções analíticas e exatas para problemas envolvendo osciladores harmônicos dependentes do tempo. Dentre estes trabalhos, é de nosso interesse a abordagem idealizada por H. R. Lewis Jr. e W. B. Riesenfeld[19-21]. Em seus trabalhos, eles dirigiram sua atenção para a resolução de problemas em mecânica quântica concernentes a osciladores harmônicos dependentes do tempo utilizando uma classe de operadores invariantes exatos. Segundo eles, até aquele momento, o uso de invariantes dependentes explicitamente do tempo em aplicações em teoria quântica havia recebido pouca atenção por parte dos pesquisadores. O método idealizado por estes autores tornou-se um dos mais típicos e poderosos para encontrar estados quânticos de sistemas Hamiltonianos dependentes do tempo[22-29].

O método de invariantes de Lewis e Riesenfeld tem como base uma relação entre auto-estados de um operador invariante e soluções da equação de Schrödinger correspondente. Este método tem sido largamente utilizado na literatura para encontrar soluções exatas da equação de Schrödinger para diversos tipos de osciladores harmônicos dependentes do tempo[30-33]. Este método tem uma ligação intrínseca com os sistemas de Ermakov, os quais foram objeto de estudo há mais de um século[34]. Tais sistemas são pares de equações diferenciais acopladas e dependentes do tempo, os quais se relacionam através de constantes de movimento chamadas de invariantes de Ermakov ou de Lewis-Ermakov.

No presente trabalho, usaremos operadores invariantes lineares à luz do método de invariantes dinâmicos para encontrar soluções exatas da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico forçado dependente do tempo do tipo Caldirola-Kanai em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado. Além disso, construímos soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano e calculamos as flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como do produto da incerteza. Também mostramos que as flutuações quânticas e a largura do pacote Gaussiano não dependem da força externa.

2. APLICAÇÃO DO MÉTODO

Nesta seção, estamos interessados em analisar o problema de um oscilador harmônico unidimensional forçado dependente do tempo. Este sistema é descrito por um Hamiltoniano $H(t)$ dado por

$$H(t) = \frac{p^2}{2me^{rt}} + \frac{me^{rt}\omega_0^2}{2}q^2 - F(t)q, \tag{1}$$

onde q e p representam, respectivamente, a coordenada e o momento canonicamente conjugados, satisfazendo a relação usual de comutação [p,q]= -iħ. As funções reais dependentes do tempo *M(t) = m exp(rt)* e *F(t)* representam, respectivamente, a massa (positiva) e a força externa aplicada ao oscilador e ω_0, a freqüência natural de oscilação. Aqui, enfatizamos que *F(t)* é uma função real do tempo, requisito necessário para garantir que *H(t)* seja Hermitiano em qualquer instante de tempo t, conforme a referência[30]. A evolução temporal do vetor de estado *Ψ(q,t)* que representa o sistema descrito pelo Hamiltoniano (1) deve obedecer a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t) = H(t)\Psi(q,t). \tag{2}$$

Seguindo o formalismo de Lewis e Riesenfeld, procuramos um operador Hermitiano não-trivial *I(t)* que satisfaça a equação

$$\frac{dI_l}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[I_l, H_l] + \frac{\partial I_l}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Se tal invariante existir e se ele não contiver operadores com derivadas temporais, a condição acima nos permite construir soluções da equação de Schrödinger (2) na forma

$$\Psi_\lambda(q,t) = e^{i\mu_\lambda(t)}\phi_\lambda(q,t), \tag{4}$$

na qual $\Phi_\lambda(q,t)$ representa uma autofunção de *I(t)* com autovalor independente do tempo λ e $\mu_\lambda(t)$ é uma função de fase que pode ser calculada através da relação

$$\hbar\frac{d\mu_\lambda(t)}{dt} = \langle\phi_\lambda|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\right)|\phi_\lambda\rangle\,, \tag{5}$$

Assim, seguindo o método do invariante dinâmico, vamos assumir a existência do nosso operador invariante linear *I(t)* na forma

$$I(t) = \alpha(t)q + \beta(t)p + \gamma(t), \tag{6}$$

na qual α, β e γ são funções reais dependentes do tempo a serem determinadas. O fato de exigirmos que tais funções sejam reais é simplesmente para garantir que nosso operador *I(t)* seja Hermitiano. De acordo com o método, I(t) deve satisfazer a equação

$$\dot{I}(t) = \dot{\alpha}(t)q + \alpha\dot{q} + \dot{\beta}(t)p + \beta(t)\dot{p} + \dot{\gamma}(t) = 0. \tag{7}$$

onde os pontos sobre as respectivas funções indicam suas derivadas com respeito ao tempo. Por outro lado, usando a equação (1), obtemos que

$$\dot{q} = \frac{1}{i\hbar}[q,H] = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{me^{rt}} \tag{8}$$

e

$$\dot{p} = \frac{1}{i\hbar}[p,H] = -\frac{\partial H}{\partial q} = -me^{rt}\omega_0^2 q + F(t) \tag{9}$$

Desse modo, substituindo as equações (8) e (9) na equação (7), chegaremos às seguintes equações:

$$\dot{\alpha}(t) = \beta(t) m e^{rt} \omega_0^2 \tag{10}$$

$$\dot{\beta}(t) = -\frac{\alpha(t)}{m e^{rt}} \tag{11}$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\beta(t) F(t). \tag{12}$$

Combinando as três equações anteriores, vemos que a solução de nosso problema reduz-se às equações:

$$\ddot{\beta}(t) + r\dot{\beta}(t) + \omega_0^2(t)\beta(t) = 0, \tag{13}$$

$$\gamma(t) = -\int_0^t \beta(\tau) F(\tau) d\tau. \tag{14}$$

Do exposto acima, temos que, uma vez que determinemos a função *β(t)* pela resolução da equação (13), as funções *α(t)* e *γ(t)* poderão ser obtidas diretamente. A primeira delas, a partir da equação (11) e, a segunda, a partir da equação (14). Portanto, conhecendo a expressão para *β(t)*, o operador invariante linear *I(t)* poderá ser escrito na forma

$$I(t) = \beta(t) p - m e^{rt} \dot{\beta}(t) q + \gamma(t). \tag{15}$$

o qual ficará completamente determinado se conhecermos a expressão para a força externa *F(t)*. O passo seguinte em nosso estudo será encontrarmos os auto-estados de *I(t)*. Estes auto-estados formam, conforme a teoria de Lewis e Riesenfeld, um conjunto completo contínuo cujos autovalores independentes do tempo λ constituem soluções da equação

$$I(t) \left|\phi_\lambda\right\rangle = \lambda \left|\phi_\lambda\right\rangle, \tag{16}$$

com a relação de ortonormalização

$$\left\langle \phi_\lambda | \phi_{\lambda'} \right\rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \tag{17}$$

Substituindo a expressão do operador invariante, dada pela equação (15), na equação (16) teremos a seguinte equação de autovalores

$$\left\{ -i\hbar\beta(t)\frac{\partial}{\partial q} - m e^{rt}\dot{\beta}(t) q + \gamma(t) \right\} \left|\phi_\lambda\right\rangle = \lambda \left|\phi_\lambda\right\rangle, \tag{18}$$

onde efetuamos a substituição *p= -iħ ∂/∂q*. Desse modo, depois de alguns cálculos simples, encontramos que as soluções da equação (18) são da forma

$$\phi_\lambda(q,t) = C_0 \exp\left\{ \frac{i m e^{rt}\dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)} q^2 + \frac{i(\lambda - \gamma(t))}{\hbar\beta(t)} q \right\}, \tag{19}$$

na qual C_0 representa uma constante de integração a ser determinada pela equação (17). Efetuado o cálculo, encontramos que

$$C_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}}. \tag{20}$$

Com isto, as soluções da equação de autovalores (16) são finalmente dadas por

$$\phi_\lambda(q,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp\left\{ \frac{i m e^{rt}\dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)} q^2 + \frac{i(\lambda - \gamma(t))}{\hbar\beta(t)} q \right\} \tag{21}$$

Para encontrarmos a função de onda, precisamos ainda da expressão das funções de fase. Desse modo, calculando os elementos de matriz do lado direito da equação (5), obtermos que a expressão para a função de fase é dada por

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{1}{2\hbar}\int_0^t \frac{(\lambda-\gamma(\tau))^2}{me^{r\tau}\beta^2(\tau)}d\tau. \tag{22}$$

Portanto, podemos escrever as soluções da equação de Schrödinger (2) como

$$\Psi_\lambda(q,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}}\exp\left\{\imath\mu_\lambda(t) + \frac{\imath me^{rt}\dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)}q^2 + \frac{\imath(\lambda-\gamma(t))}{\hbar\beta(t)}q\right\}, \tag{23}$$

onde as funções de fase são dadas pela equação (22).

A seguir, estamos interessados em construir soluções para a equação de Schrödinger (2) do tipo pacote de ondas Gaussiano. Para tal propósito, vamos inicialmente separar nossas funções de fase em três partes, desenvolvendo o binômio no numerador da integral da equação (22). Assim, teremos que

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{1}{2\hbar}\left\{\int_0^t \frac{\lambda^2}{me^{r\tau}\beta^2(\tau)}d\tau - 2\int_0^t \frac{\gamma(\tau)\lambda}{me^{r\tau}\beta^2(\tau)}d\tau + \int_0^t \frac{\gamma^2(\tau)}{me^{r\tau}\beta^2(\tau)}d\tau\right\}. \tag{24}$$

Definiremos a seguir algumas funções que nos ajudarão a reescrever a nossa equação anterior. As funções citadas são as seguintes

$$f_1(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{me^{r\tau}\beta^2(\tau)}, \tag{25}$$

$$f_2(t) = \int_0^t \frac{\gamma(\tau)}{me^{r\tau}\beta^2(\tau)}d\tau, \tag{26}$$

$$f_3(t) = -\frac{1}{2\hbar}\int_0^t \frac{\gamma^2(\tau)}{me^{r\tau}\beta^2(\tau)}d\tau. \tag{27}$$

Com estas definições, reescreveremos a equação (24) como segue

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{f_1(t)}{2\hbar}\lambda^2 + \frac{f_2(t)}{\hbar}\lambda + f_3(t). \tag{28}$$

Deste modo, podemos reescrever a função de onda (23) na forma

$$\Psi_\lambda(q,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta}}\exp\left\{\imath\left[-\frac{f_1}{2\hbar}\lambda^2 + \frac{(q+\beta f_2)\lambda}{\beta\hbar} + \frac{\dot{\beta}me^{rt}q^2}{2\hbar\beta} - \frac{\gamma}{\hbar\beta}q + f_3\right]\right\}. \tag{29}$$

Agora, para construirmos soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano da equação (2), vamos considerar uma função peso Gaussiana dada por

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}}\exp(-\frac{a^2}{4}\lambda^2), \tag{30}$$

na qual *a* é uma constante positiva. Assim, inserindo as equações (29) e (30) na solução geral da equação de Schrödinger (2), a qual é escrita como

$$\Psi(q,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\Psi_\lambda(q,t)d\lambda, \tag{31}$$

podemos resolver a integral em $d\lambda$ e, finalmente, escrever a função de onda do pacote Gaussiano como segue

$$\Psi(q,t) = (\frac{2B}{\pi})^{\frac{1}{4}}e^{iC_3(t)}e^{i(C_1q+C_2)^2}e^{-B(q+\beta f_2)^2}, \tag{32}$$

na qual definimos as seguintes funções:

$$C_1(t) = \sqrt{\frac{me^{rt}\dot{\beta}}{2\hbar\beta} + \frac{2f_1}{\beta^2\hbar^3a^4(1+\frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})}}, \tag{33}$$

$$C_2(t) = \frac{2f_1f_2}{\beta\hbar^3a^4(1+\frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})}\frac{1}{C_1(t)} - \frac{\gamma}{2\hbar\beta C_1}, \tag{34}$$

$$C_3(t) = \frac{2f_1f_2}{\hbar^3a^4(1+\frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})} - C_2^2 + f_3 + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2f_1(t)}{\hbar a^2}, \tag{35}$$

$$B(t) = \frac{1}{\beta^2\hbar^2a^2(1+\frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})}. \tag{36}$$

Podemos, além disso, calcular a densidade de probabilidade dependente do tempo associada a esse pacote Gaussiano. Ela é também Gaussiana para um tempo qualquer. Sua expressão é dada por

$$\rho(q,t) = |\Psi(q,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)}exp\left\{-\frac{(q+\beta f_2)^2}{\sigma^2(t)}\right\}, \tag{37}$$

com largura dependente do tempo

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\hbar^2a^2\beta^2(t)}{2}\left(1+\frac{2f_1^2(t)}{\hbar^2a^4}\right)}. \tag{38}$$

Também, podemos verificar facilmente que a função de onda (31) é normalizada e a densidade de probabilidade dependente do tempo é conservada, conforme esperado:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(q,t)|^2\,dq = (\frac{2B}{\pi})^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2B(q+\beta f_2)^2} = (\frac{2B}{\pi})^{\frac{1}{2}}(\frac{2B}{\pi})^{-\frac{1}{2}} = 1. \tag{39}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Da equação (32), vemos que o centro do pacote permanece em $q=-\beta(t)\, f_2(t)$, enquanto que a largura do mesmo atinge um mínimo em $t=0$. Também, observamos que (veja a equação (38)) a largura do pacote Gaussiano não depende da força externa $F(t)$. Na verdade, a forma do pacote não se altera com a força externa. Isto significa que a força externa age uniformemente no pacote de ondas, ou melhor, o pacote Gaussiano tem um *centro de massa* sobre o qual a força $F(t)$ atua de modo que o pacote se desloca sem sofrer distorção. A força externa simplesmente desloca o pacote de ondas de uma quantidade $-\beta(t)\, f_2(t)$,

Nosso próximo passo será calcular as flutuações quânticas da coordenada e do momento no estado $\Psi(q,t)$. Devemos primeiramente encontrar os valores esperados de q, p, q^2 e p^2. Depois de um pouco de álgebra, obtemos que[30]

$$\langle q\rangle = -\beta f_2. \tag{40}$$

$$\langle q^2\rangle = \frac{1}{4B} + (\beta f_2)^2. \tag{41}$$

$$\langle p\rangle = 2\hbar C_1\left[C_2 - C_1\beta f_2\right]. \tag{42}$$

$$\langle p^2\rangle = \hbar^2C_1^2\left\{4\left[C_2 - C_1\beta f_2\right]^2 + \frac{C_1^2}{B} + \frac{B}{C_1^2}\right\}. \tag{43}$$

Das equações acima, podemos agora obter as flutuações quânticas, de q e p. Após alguns cálculos, encontramos que

$$\Delta q = \sqrt{\langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2} = \frac{1}{2\sqrt{B}}, \tag{44}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \hbar\sqrt{\frac{B^2 + C_1^4}{B}}. \tag{45}$$

Das equações (44) e (45) vemos que as flutuações de q e p no estado *Ψ(q,t)* não dependem da força externa. Este resultado concorda com aquele obtido na referência[35]. Aqui, notamos que, em termos das flutuações em q, a largura σ(t) do pacote Gaussiano é dada por $\sigma(t)= 2^{1/2}\,\Delta q$. Também, das equações (44) e (45) encontramos que a relação de incerteza é dada por

$$\Delta q\Delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 + \frac{C_1^4}{B^2}}. \tag{46}$$

Uma análise direta desta equação nos mostra que o produto da incerteza atinge um valor mínimo igual a ħ/2 para um dado tempo τ tal que $C_1(\tau)=0$, ou (veja a equação (33))

$$\dot{\beta}(\tau) = -\frac{4f_1(\tau)}{me^{rt}\beta(\tau)\left[\hbar^2a^4 + 4f_1^2(\tau)\right]}. \tag{47}$$

Portanto, a equação acima nos mostra que, se começarmos com um pacote de incerteza mínima, Δq Δp = ħ/2 para τ=0, então a condição acima será obviamente reduzida a *dβ(0)/dt*=0 (notemos que, por definição, $f_1(0)=0$). Também, notemos que *β(0)* está relacionada à largura inicial do pacote Gaussiano. Assim, as condições iniciais necessárias para resolver equação (13) ficam completamente estabelecidas. Aqui, observamos que a equação (13) descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido clássico. Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem, cuja solução oscilatória é dada por

$$\beta(t) = A\frac{e^{-\frac{rt}{2}}}{\sqrt{m\omega_0}}\sin(\Omega_0 t + \Phi), \tag{48}$$

onde *A* e Φ são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais e

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2 - (r^2/4). \tag{49}$$

Aqui, observamos que apenas as soluções oscilatórias da equação (13) serão consideradas, ou seja, o caso no qual a expressão dada pela equação (49) seja positiva. Considerando as condições iniciais, encontramos que

$$A = \frac{\sqrt{2m\omega_0^3}\sigma(0)}{\hbar a\Omega_0} \tag{50}$$

$$\sin(\Phi) = \frac{\Omega_0}{\omega_0}. \tag{51}$$

Desse modo, usando a equação (49), podemos escrever as equações (33) e (36) na forma

$$C_1(t) = \left\{\frac{m\omega_0}{2\hbar\tan(\Omega_0 t + \Phi)} - \frac{1}{4\hbar} + \frac{2f_1(m\omega_0)^{1/2}}{Aexp(-rt/2)\sin(\Omega_0 t + \Phi)^2\hbar^3a^4(1 + \frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{53}$$

$$B(t) = \left\{A\frac{exp(-rt/2)}{(m\omega_0)^{1/2}}\sin(\Omega_0 t + \Phi)^2\hbar^2a^2(1 + \frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})\right\}^{-1}. \tag{54}$$

o que nos permite determinar o produto da incerteza dado pela equação (46).

4. CONCLUSÃO

Em nossa investigação, tratamos do oscilador harmônico forçado dependente do tempo de Caldirola-Kanai. Utilizamos um operador invariante linear à luz do método de invariantes dinâmicos com o propósito de encontrar soluções exatas para a equação de Schrödinger em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado. Construímos soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos e calculamos as flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como o produto da incerteza. Além disso, mostramos que as flutuações e a largura do pacote Gaussiano não dependem da força externa. Concluímos este trabalho, ressaltando que a abordagem alternativa aqui utilizada oferece algumas vantagens quando comparada com outros métodos apresentados na literatura física, a saber:

1. Ela nos permite derivar a função de onda diretamente, uma vez que o operador invariante linear é facilmente diagonalizável. Também, uma vez que conheçamos as soluções clássicas do oscilador harmônico amortecido não-forçado correspondente, a função de onda fica completamente determinada;
2. Nossa função de onda permite que obtenhamos as soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano de maneira mais fácil de que pelo uso de outros métodos;
3. Nossa abordagem permite uma análise mais clara e direta das propriedades físicas do sistema, posto que os estados de pacotes Gaussianos são muito comuns e que os valores esperados das quantidades físicas nesses estados são, em princípio, facilmente calculáveis.

---

1. COLEGRAVE, R. K.; ABDALLA, M. S. A canonical description of the Fabry-Perot cavity. *Optica Acta* 28:495-501 (1981).
2. BROWN, L. S. Quantum motion in a Paul trap. *Phys. Rev. Lett.* 66:526-529 (1991).
3. LEMOS, N. A.; NATIVIDADE, C. P. Harmonic oscillator in expanding universes. *Nuovo Cimento B* 99:211-225 (1987).
4. HOLSTEIN, B. R. The adiabatic propagator. *Am. J. Phys* 57:714 (1989).
5. CHUMAKOV, S. M.; DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. Correlations functions of the nonstationary quantum singular oscillator. *J. Phys. A* 19:3229-3239 (1986).
6. GAO, X. C.; FU, J.; LI, H.; GAO, J. Invariant formulation and exact solutions for the relativistic charged Klein-Gordon field in a time-dependent spatially homogeneous electric field. *Phys. Rev. A* 57:753-761 (1998).
7. GAO, X. C.; FU, J.; XU, J.; ZOU, X. Invariant theory and exact solutions for the quantum Dirac field in a time-dependent spatially homogeneous electric field. *Phys. Rev. A* 59:55-63 (1999).
8. BERTONI, C.; FINELLI, F.; VENTURI, G. Adiabatic invariants and scalar fields in a de Sitter space-time. *Phys. Lett. A* 237:331-336 (1998).
9. DEKKER, H. Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator. *Phys. Rep.* 80:1-112 (1981).
10. UM, C. I.; YEON, K. H.; GEORGE, T. F. The quantum damped harmonic oscillator. *Phys. Rep.* 362:63-192 (2002).
11. CALDIROLA, P. Forza non conservative nella meccanica quantistica. *Nuovo Cimento* 18:393 (1941).
12. CALDIROLA, P. Quantum theory of nonconservative systems. *Nuovo Cimento B* 77:241-261 (1943).
13. KANAI, E. On the quantization of the dissipative systems. Prog. Theor. Phys. 3:440-442 (1948).
14. CERVERO, J. J.; VILLAROEL, J. D. On the quantum theory of the damped harmonic oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen.* 17:2963-2971 (1984).
15. GREENBERG, D. M. A critique of the major approaches to damping in quantum theory. *J. Math. Phys*. 20:762 (1979).
16. ABDALLA, M. S. Canonical treatment of harmonic oscillator with variable mass. *Phys. Rev. A* 33:2870-2876 (1986).
17. GREENBERG, D. M. A critique of the major approaches to damping in quantum theory. *J. Math. Phys.* 20:762 (1979).
18. RAY, J. R. Lagrangians and systems they describe - how not to treat dissipation. *Am. J. Phys.* 47:626-629 (1979).

19. LEWIS JR., H. R. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type Hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.* 18:510-512 (1967).
20. LEWIS JR. Class of exact invariants for classical and quantum timedependent harmonic oscillators. *J. Math. Phys*. 9:1976-1986 (1968).
21. LEWIS JR., H. R.; RIESENFELD, W. B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a timedependent eletromagnetic field. *J. Math. Phys*. 10:1458-1473 (1969).
22. PEDROSA, I. A. Coherent states for certain time-dependent systems. *Rev. Bras. Fís*. 19:502-515 (1989).
23. CARVALHO, A. M. M.; FURTADO, C.; PEDROSA, I. A. Scalar fields and exact invariants in a Friedmann-Robertson-Walker spacetime. *Phys. Rev. D* 70:123523 (2004).
24. PEDROSA, I. A.; FURTADO, C.; ROSAS, A. Exact linear invariants and quantum effects in the early universe. *Phys. Lett. B* 651:384-387 (2007).
25. PEDROSA, I. A. Complete exact quantum states of the generalized timedependent harmonic oscillator. *Mod. Phys. Lett. B* 18:1267-1274 (2004).
26. PEDROSA, I. A.; ROSAS, A.; GUEDES, I. Exact quantum motion of a particle trapped by oscillating fields. *J. Phys. A: Math. Gen*. 38:7757-7763 (2005).
27. PEDROSA, I. A. Canonical transformations and exact invariants for dissipative systems. *J. Math. Phys*. 28:2662 (1987).
28. PEDROSA, I. A. Exact wave functions of a harmonic oscillator with timedependent mass and frequency. *Phys. Rev. A* 55:3219-3221 (1997).
29. PEDROSA, I. A., SERRA, G. P.; GUEDES, I. Wave functions of a timedependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation. *Phys. Rev. A* 56:4300-4303 (1997).
30. LOPES DE LIMA, A.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. On the quantum motion of a generalized time-dependent forced harmonic oscillator. *Ann. of Phys*. 323:2253-2264 (2008).
31. LOPES DE LIMA, A.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. On the quantum description of light in homogeneous conducting linear media. *J. of Phys. B: Atomic, Mol. and Opt. Phys.* 41:115503 (2008).
32. LOPES DE LIMA, A.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. On the quantization of the electromagnetic field in conducting media. Artigo aceito para publicação no *J. Mod. Phys. ID T MOP* – 2008 – 0299.R1 (2008).
33. LOPES DE LIMA, A.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. Quantum dynamics of a particle trapped by oscillating fields. Artigo submetido a publicação. (2008).
34. ROGERS, C.; SCHIEF, W. K. Multi-component Ermakov systems: structure and linearization. *J. Math. Anal. Appl*. 198:194-220 (1996).
35. VAIDYANATHAN, R. Linear invariants of a time-dependent quantal oscillator. *J. Math. Phys*. 23:1346 (1982).