

## Otimização geométrica de um arranjo triangular de cilindros submetido a escoamento laminar com convecção forçada

M. M. Galarça<sup>1,\*</sup>; F. R. Cardoso<sup>2</sup>; A. L. Razera<sup>2</sup>; I. C. Acunha Jr<sup>1</sup>; L. A. Isoldi<sup>2</sup>;  
A. F. Porte<sup>1</sup>, L. A. O. Rocha<sup>3</sup>, E. D. dos Santos<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul,  
96201-460, Rio Grande - RS, Brasil.

<sup>2</sup>Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande (FURG), 96201-900, Rio Grande - RS, Brasil.

<sup>3</sup>Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 90050-170, Porto Alegre - RS, Brasil.

\*marcelo.galarca@riogrande.ifrs.edu.br;

(Recebido em 03 de dezembro de 2013; aceito em 30 de julho de 2014)

Resumo. O presente trabalho numérico estuda o arranjo triangular de cilindros submetidos a escoamentos transientes, bi-dimensionais, incompressíveis, laminares e com convecção forçada por meios do método *Constructal Design*. As simulações foram realizadas para escoamentos com números de Reynolds e Prandtl de  $Re_D = 100$  e  $Pr = 0.71$ . As equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia foram resolvidas com o uso do método de volumes finitos (FVM – do inglês: *Finite Volume Method*). A área ocupada pelos três cilindros é uma restrição geométrica do problema, enquanto as razões  $S_T/D$  (passo transversal sobre o diâmetro) e  $S_L/D$  (passo longitudinal sobre o diâmetro) são os graus de liberdade. Vale destacar que os diâmetros dos três cilindros são iguais em todos os casos. O principal objetivo aqui é avaliar qual razão  $S_T/D$  minimiza o coeficiente de arrasto e maximiza a taxa de transferência de calor (número de Nusselt) entre os cilindros e o escoamento circundante, i.e., um problema multiobjetivo. Em todos os casos foi considerada uma razão  $S_L/D = 3.5$ . Os resultados mostraram que o comportamento fluidodinâmico e térmico foi bastante influenciado pela razão  $S_T/D$ . O coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) mínimo e o máximo número de Nusselt ( $Nu_D$ ) são obtidos para  $S_T/D = 1.5$  e  $5.5$ , respectivamente. Contudo, os melhores arranjos considerando a função multiobjetivo (arrasto e transferência de calor) foram alcançados na região  $S_T/D \sim 2.0$ , mais próximo do ótimo obtido para o problema fluidodinâmico, ao contrário do observado para um caso de par de cilindros abordado na literatura.

Palavras-chave: Otimização geométrica, coeficiente de arrasto, número de Nusselt, problema multi-objetivo, *Constructal Design*.

### Geometrical optimization of a triangular arrangement of cylinders submitted to a laminar forced convective flow

Abstract. The present numerical work studies a triangular arrangement of cylinders submitted to transient, two-dimensional, transient, laminar, incompressible flows with forced convective heat transfer by means of *Constructal Design*. The simulations were performed for flows with Reynolds and Prandtl numbers of  $Re_D = 100$  and  $Pr = 0.71$ . The conservation equations of mass, momentum and energy are solved with the Finite Volume Method (FVM). The occupied area of three cylinders are a problem restriction, while the ratios  $S_T/D$  (distance from the center-to-center posterior cylinders and the diameter) and  $S_L/D$  (distance from the frontal cylinder to the posterior cylinders) are the degrees of freedom. It is worthy to mention that all cylinders have the same diameter. The main purpose here is to evaluate the ratio  $S_T/D$  which minimizes the drag coefficient and maximizes the heat transfer rate (Nusselt number) between the cylinders and the surrounding flow, i.e., a multi-objective problem. For all cases it was considered a fixed ratio of  $S_L/D = 3.5$ . Results showed that the fluid dynamic and thermal behavior of the flow was highly influenced by the ratio  $S_T/D$ . The minimal drag coefficient ( $C_D$ ) and the maximal Nusselt number ( $Nu_D$ ) are obtained for  $S_T/D = 1.5$  and  $5.5$ , respectively. However, the best arrangements considering the multi-objective problem (drag and heat transfer) were achieved for the region  $S_T/D \sim 2.0$ , near of the optimal shape obtained for the fluid dynamic problem, contrarily to noticed for a flow over a pair of cylinder studied in the literature.

Keywords: Geometric optimization, drag coefficient, Nusselt number, multi-objective problem, *Constructal Design*.

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas térmicos são sempre um tópico de estudo e discussão em engenharia. O interesse em tal assunto recai sobre a complexidade em descrever todos os fenômenos envolvidos na troca de calor ou, simplesmente, pelos problemas fluidodinâmicos inerentes. Um dos principais pontos em engenharia é o escoamento em torno de cilindros circulares. Devido ao seu complexo comportamento dinâmico em relação à esteira formada pelo escoamento e, também, sua representação para diversos sistemas, tais como escoamento sobre estruturas (pontes, torres e edificações em geral), perfis aerodinâmicos de aeronaves, conversores de energia eólica, trocadores de calor multitubulares, condensadores, evaporadores, geradores de vapor e outros [1, 2]. Estudos a respeito de escoamentos em torno de um único cilindro ainda tem sido foco de atenção de muitos estudos nos campos numérico e experimental [2, 3, 4].

A respeito da fenomenologia de escoamentos externos existem diversas análises para caracterização do comportamento fluidodinâmico como função dos números de Reynolds. O mesmo processo ocorre com o transporte de energia, onde as taxas de transferência de calor entre o cilindro e a vizinhança são igualmente influenciadas pelo número de Reynolds [5].

Os esforços na engenharia seguem no sentido de encontrar o sistema mais eficiente como um todo. Desta forma, há muitas técnicas e métodos para alcançar o melhor projeto (*design*). O campo da Lei *Constructal* iniciou a partir da percepção de que o “*design*” é um fenômeno físico universal, [6], e pode ser entendido como uma geração da tendência de todas as coisas em fluir através de caminhos que gerem menor “resistência”. Assim, é entendido como um princípio físico que une o “animado” com o “inanimado” cobrindo uma ampla faixa de sistemas de escoamento. Logo, se é uma Lei, pode ser empregada para diversas aplicações em todos os domínios de geração de *design* e evolução, desde a biologia e física até organizações sociais, evolução tecnológica, sustentabilidade e engenharia [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Conforme abordado em [6], a Lei *Constructal* não é uma afirmação a respeito de otimização, maximização, minimização ou qualquer outra figura mental de “projeto final” ou “destino”. A Lei *Constructal* descreve a direção de evolução no tempo e o fato de que o processo de projetar não é um fenômeno estático: é dinâmico, tudo se modifica o tempo todo. As muitas aplicações da teoria *Constructal* para gerar uma configuração natural e engenhosa são apresentadas em [15]. Nesta referência é mostrado como uma configuração natural – bacias hidrográficas, turbulência, forma física animal, rachaduras em sólidos, clima e outras podem ser previstas pelo princípio. O mesmo princípio pode ser aplicado no domínio da engenharia: células combustíveis, rodovias de transporte público, movimentação de bens e informação e etc. Sua aplicabilidade para a física dos sistemas de escoamento tem sido amplamente discutida em literatura recente [16, 17, 18, 19, 20].

No que tange o escopo sobre corpos submetidos a escoamentos, há ainda muitos estudos e pesquisas atualmente. Um importante tópico na engenharia está na complexidade de escoamentos em torno de cilindros circulares, devido a esteira de vórtices e sua representação em sistemas térmicos e fluidodinâmicos, conforme já mencionado anteriormente. Neste sentido, [21] avalia os padrões de escoamentos laminares em convecção mista para um par de cilindros circulares arranjados transversalmente à corrente vertical de ar. O estudo de escoamentos turbulentos transientes e sua influência sobre a taxa de transferência de calor em uma matriz de cubos também é realizada [22]. Dutos ranhurados [23] e blocos aquecidos em canal com cilindro oscilatório transversal [24], ambos para escoamentos turbulentos também são estudados. A literatura apresenta diversos exemplos de escoamentos sobre configurações multicilindros e destacam as complexas interações entre as camadas limites, vórtices, vórtices de von Kármán e esteira de vórtices [25]. Para a abordagem de escoamentos isotérmicos, [26] avaliaram o número de Strouhal e as forças sobre dois cilindros em tandem de diferentes diâmetros, e [27] realizaram uma avaliação numérica de escoamento transiente, incompressível, bidimensional, laminar e turbulento em torno de dois cilindros dispostos lado-a-lado.

No campo da Lei *Constructal*, a otimização geométrica de dissipadores de calor, canais de resfriamento e micro canais [28, 29] tem sido abordada. Em [28], por exemplo, foi estudada a maximização da condutância térmica global, ou minimização da resistência térmica. Em [29], um estudo semelhante foi desenvolvido. No entanto, outras constantes globais foram avaliadas

para a otimização da geometria: um volume fixo e um comprimento axial fixo do micro canal de um dissipador de calor. Em ambos os casos, a Lei *Constructal* levou à melhor configuração geométrica.

Além disso, o princípio *Constructal* tem sido empregado para aumentar a taxa de transferência de calor em dutos pela utilização de regiões de entrada corrugadas [30] e para maximizar a transferência de calor em escoamento cruzado sobre arranjo paralelo de cilindros circulares [31]. A otimização de escoamentos externos é apresentada em diversos estudos, incluindo [18, 32, 33, 34, 35].

A investigação do *design* ótimo para um escoamento com convecção mista sobre placas verticais equidistantes de comprimentos variados foi apresentada em [32]. Neste estudo, o objetivo foi maximizar a taxa de transferência de calor entre as placas e o escoamento circundante. Em [31] foi apresentado um estudo relacionado ao *design* que maximiza a taxa de transferência de calor entre um par de cilindros e o escoamento circundante com convecção natural. Foi observado que a taxa aumenta quando a estrutura aumenta sua complexidade geométrica. Além disso, os diâmetros de cilindros otimizados são relativamente insensíveis a mudanças do número de Rayleigh (força motriz do escoamento). Na literatura [35] é estudada a aplicação da Lei *Constructal* para maximizar a taxa de transferência de calor em escoamento cruzado sobre banco de cilindros quadrados. O estudo objetiva a obtenção do número ótimo de cilindros quadrados ou deslocamento ótimo de cada cilindro na montagem para melhorar a transferência de calor entre o obstáculo e o escoamento. Foi observado que o espaçamento ótimo entre os obstáculos decresce monotonicamente ao aumento dos números de Reynolds e Prandtl. Posteriormente, [18] avalia a influência da configuração de um trocador de calor com dois, três e quatro tubos sobre a performance térmica global. O fluido do lado frio foi impulsionado por convecção natural nos tubos verticais conectados por dois canais, enquanto que o escoamento no lado aquecido se deu perpendicularmente aos tubos verticais. Em ambos os lados do trocador de calor o escoamento era laminar. A referência [33] investigou o efeito de escoamentos laminares com convecção forçada para cilindros rotativos com diferentes tamanhos e configurações, tendo o propósito de maximizar a taxa de transferência de calor entre os cilindros e a vizinhança.

Um estudo numérico, [34], para otimização geométrica de escoamentos por convecção forçada, transientes, bidimensionais, incompressíveis e turbulentos sobre um par de cilindros é apresentado. A turbulência é tratada por meio de LES (Large Eddy Simulation) com modelo sub-malha dinâmico de Smagorinsky. O principal propósito foi avaliar qual o ângulo entre o par de cilindros minimizaria a força de arrasto e maximizaria a taxa de transferência de calor. O arranjo ótimo foi alcançado quando o ângulo se encontra entre 45° e 60°, i.e., mais próximo a geometria ótima para o problema térmico.

No presente trabalho a Lei *Constructal* é aplicada para otimizar as relações  $S_L/D$  (passo longitudinal sobre o diâmetro do cilindro) e  $S_T/D$  (passo transversal sobre o diâmetro do cilindro) para um arranjo triangular de três cilindros imersos em escoamento de convecção forçada, laminar e transiente. O principal objetivo aqui é determinar o arranjo ótimo que maximiza o coeficiente de transferência de calor e minimiza o coeficiente de arrasto. Assim, um problema multi-objetivo é resolvido. Conforme apresentado na literatura, um estudo para a otimização geométrica de um arranjo com três cilindros utilizando a Lei *Constructal*, mesmo que para escoamento laminar, não foi explorado até então.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA

A modelagem dos escoamentos incompressíveis, transientes com convecção forçada no regime laminar é baseada na solução das equações de conservação em conjunto com as condições de contorno e iniciais do problema. As equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia são dados, respectivamente, por [36]:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1 \text{ e } 2) \text{ em } t \times \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_j) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} = 0 \quad (i, j, k = 1 \text{ e } 2) \text{ em } t \times \Omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_j T) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\} - q''' = 0 \quad (j = 1 \text{ e } 2) \text{ em } t \times \Omega \quad (3)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido ( $\text{kg/m}^3$ );  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido ( $\text{kg/(ms)}$ );  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido ( $\text{m}^2/\text{s}$ );  $\alpha$  é a difusividade térmica ( $\text{m}^2/\text{s}$ );  $v_i$  é a velocidade do fluido na direção  $i$ ,  $i = 1$  e  $2$  ( $\text{m/s}$ );  $x_i$  corresponde à coordenada espacial na direção  $i$ ,  $i = 1$  e  $2$  ( $\text{m}$ );  $P$  é a pressão ( $\text{N/m}^2$ );  $T$  é a temperatura ( $^\circ\text{C}$  or  $\text{K}$ );  $\delta_{ij}$  é o operador delta de Kronecker;  $\Omega$  é o domínio espacial ( $\text{m}$ );  $t$  representa o domínio de tempo ( $\text{s}$ ) e  $q'''$  é o termo fonte de energia, que para os casos simulados no presente trabalho é nulo.

As Eqs. (1) – (3) são resolvidas através de um software comercial de dinâmica dos fluidos computacional (CFD – do inglês: *Computational Fluid Dynamics*) que é baseado no método de volumes finitos (FVM – do inglês: *Finite Volume Method*) [37]. Em todas as simulações foram empregados volumes finitos quadriláteros. O solver é baseado na pressão, o acoplamento pressão-velocidade foi realizado com o uso do algoritmo SIMPLE e para o tratamento dos termos advectivos foi empregado o esquema de interpolação *Upwind* de segunda ordem para as equações de conservação de quantidade de movimento e energia. Além disso, os cálculos foram considerados convergidos quando os resíduos para as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia entre duas iterações consecutivas foram menores do que  $10^{-6}$ ,  $10^{-6}$  e  $10^{-8}$ , respectivamente. Maiores detalhes relacionados com o FVM podem ser encontrados em [38, 39].

As simulações numéricas foram realizadas usando um computador com dois processadores dual-core Intel com 2,67 GHz de clock e 8GB de memória RAM. Para a paralelização foi utilizada a biblioteca de passagem de mensagem (MPI – do inglês: *Message Passing Interface*). O tempo de processamento para cada simulação foi de aproximadamente  $1,16 \times 10^3$  s.

A independência de malha para cada escoamento é alcançada quando o desvio relativo entre o número de Nusselt ( $Nu_D$ ) médio obtido nos três cilindros para duas malhas consecutivas atende ao seguinte critério ( $|Nu_D^{j+1} - Nu_D^j|/Nu_D^j < 5 \times 10^{-3}$ , onde o superíndice  $j$  refere-se a malha grosseira e o superíndice  $j+1$  a malha mais refinada. Os resultados do teste de independência de malha, bem como o tempo de processamento ( $t_{\text{proces}}$ ) para cada malha simulada são apresentados na Tab. 1. Em todos os casos estudados foi empregado um passo de tempo de  $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$  s e o tempo final de simulação foi  $t_f = 2,0$  s.

Tabela 1: Teste de independência de malha para um escoamento sobre três cilindros a  $Re_D = 100$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $S_T/D = 5,5$  e  $S_L/D = 5,0$ .

Número de Volumes	$Nu_D$	$( Nu_D^{j+1} - Nu_D^j )/Nu_D^j$	$t_{\text{proces}}$ (s)
24000	5,5121	$3,71 \times 10^{-2}$	4200
47604	5,3073	$7,36 \times 10^{-3}$	5760
63386	5,2683	$4,65 \times 10^{-3}$	11640
148396	5,2438	-----	-----

Com o objetivo de avaliar a metodologia numérica empregada foi simulado um escoamento incompressível, transiente, laminar e com convecção forçada para  $Re_D = 100$  e  $Pr = 0,71$ . O número de Nusselt médio foi comparado com resultados de correlações experimentais apresentadas na literatura [40, 41]. Os resultados de comparação são apresentados na Tab. 2 e apresentaram um desvio máximo de aproximadamente 1,5 %. Estudos preliminares de verificação e validação da metodologia numérica empregada no presente trabalho foram realizados e, por simplicidade, não serão reproduzidos aqui, vide Refs. [34, 35].

Tabela 2: Validação de metodologia numérica para obtenção do número de Nusselt em um escoamento a  $Re_D = 100$  e  $Pr = 0,71$ .

Referência	$Nu_D$	Desvio (%)
Presente trabalho	5,2683	-----
Hilpert [40]	5,2100	0,96
Churchill e Bernstein [41]	5,1800	1,54

### 3. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Para o problema deste estudo, foi considerado um escoamento sobre um arranjo triangular de cilindros com o mesmo diâmetro  $D = 0,1$  m. O domínio computacional possui as seguintes dimensões:  $L = 25,0D = 2,5$  m,  $H = 15,0D = 1,5$  m,  $L_1 = 8D = 0,8$  m. A Figura 1 apresenta o domínio do escoamento, onde é possível observar também duas variáveis que serão avaliadas no presente trabalho:  $S_T$  (passo transversal) e  $S_L$  (passo longitudinal). Com relação ao comportamento fluidodinâmico do escoamento, o mesmo é gerado pela imposição de um perfil de velocidades constante  $u_\infty = 50$  m/s (velocidade na corrente livre) na superfície de entrada. As superfícies dos cilindros possuem a condição de contorno de não-deslizamento e impermeabilidade ( $u_w = 0$  m/s). As superfícies inferior e superior possuem uma condição de simetria e a superfície lateral direita possui uma condição de contorno de tensão nula ( $\tau = 0$ ). Para o problema térmico, o aquecimento do fluido é causado pela diferença de temperatura entre a corrente livre do escoamento ( $T_\infty = 20$  °C) que é constante e imposta na superfície de entrada, e a temperatura dos cilindros ( $T_w = 30$  °C).

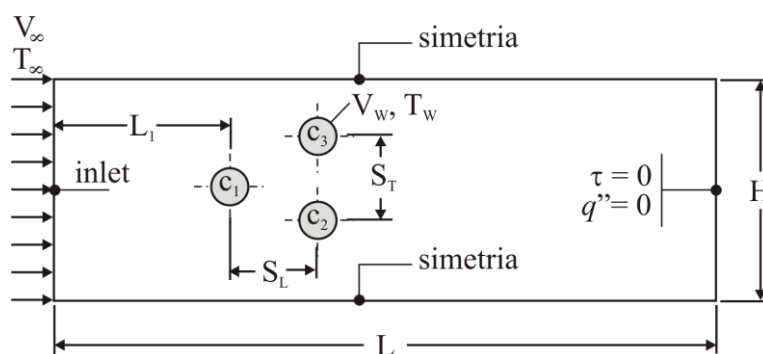


Figura 1: Domínio computacional do escoamento sobre arranjo triangular de cilindros com  $Re_D = 100$  e  $Pr = 0,71$ .

Para a otimização geométrica do problema é empregado o método *Constructal Design* [8, 9, 34]. *Constructal Design* é um método baseado no princípio de objetivos e restrições (locais e globais) sendo o método usado para aplicação da Lei *Constructal*. A Lei *Constructal* afirma que qualquer sistema de fluxo com dimensões finitas para persistir ao longo do tempo (para sobreviver) deve evoluir suas configurações geométricas de tal forma que facilite o acesso as correntes internas através do sistema.

Para o presente estudo, foram definidas como restrições geométricas do problema: 1) a área ocupada pelos três cilindros, que é a mesma em todos os casos estudados ( $A_t = A_{c1} + A_{c2} + A_{c3}$ ), 2) os diâmetros dos cilindros são iguais ( $D_1 = D_2 = D_3 = D$ ) e 3) o espaço ocupado pelo par de cilindros a jusante do primeiro cilindro não deve ser maior do que o domínio computacional ( $S_T + D < H$ ). O problema possui dois graus de liberdade:  $S_T/D$  e  $S_L/D$  e duas funções objetivo: 1) a maximização do número de Nusselt ( $Nu_D$ ) sobre o arranjo de cilindros e a minimização do coeficiente de arrasto ( $C_D$ ). O número de Nusselt ( $Nu_D$ ) para um escoamento sobre cilindro é dado pela Eq.(4).

$$Nu_D = \frac{hD}{k_f} \quad (4)$$

onde o  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção ( $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ ),  $D$  é o diâmetro do cilindro (m) e  $k_f$  é a condutividade térmica do fluido ( $\text{W}/(\text{mK})$ ). Numericamente, o cálculo é realizado através do cálculo do gradiente de temperaturas na forma adimensional, que é dada pela Eq.(5).

$$Nu_D = \left. \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right|_{n^*=0} \quad (5)$$

onde  $T^*$  é a temperatura adimensional dada por  $(T^* = (T - T_S)/(T_\infty - T_S))$  e  $n^*$  é uma coordenada espacial adimensional normal a superfície do cilindro ( $n^* = n/D$ ).

Em relação ao coeficiente de arrasto,  $C_D$ , para um cilindro é dado pela Eq.(6).

$$C_D = \frac{F_D}{A_f (\rho v_\infty^2 / 2)} \quad (6)$$

onde  $F_D$  é a força de arrasto do escoamento sobre o cilindro ( $\text{N}/\text{m}^2$ ),  $A_f$  é a área projetada do cilindro ( $\text{m}^2$ ), e  $v_\infty$  é a velocidade do escoamento na corrente livre. A força de arrasto é dada pela Eq.(7).

$$F_D = \int_A (\tau_w + p) dA \quad (7)$$

onde  $\tau_w$  é a tensão de cisalhamento na parede e  $p$  é a pressão superficial.

O processo de otimização é dividido em dois passos, conforme mostrado na Fig. 2. No primeiro passo, a geometria é otimizada pela variação do grau de liberdade  $S_T/D$  e mantendo-se fixo o parâmetro  $S_L/D$ . O maior valor de número de Nusselt ( $Nu_D$ ) será a geometria ótima para o problema térmico e o menor valor para o coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) e o parâmetro  $S_T/D$  correspondente será o parâmetro uma vez otimizado,  $(S_T/D)_o$ . No segundo passo, o mesmo processo é repetido para vários valores de  $S_L/D$ . No presente estudo, o parâmetro  $S_L/D$  é mantido constante ( $S_L/D = 3,5$ ), enquanto o parâmetro  $S_T/D$  é variado na seguinte faixa ( $1,5 \leq S_T/D \leq 5,5$ ).

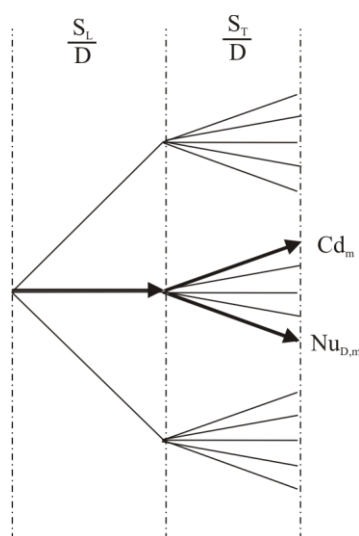


Figura 2: Diagrama ilustrando o processo de otimização para um problema com dois graus de liberdade.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Conforme mencionado na seção anterior, as análises cobrem uma variação do parâmetro  $S_T/D$  enquanto o passo longitudinal é mantido constante,  $S_L/D = 3,5$ . A otimização busca a minimização do coeficiente de arrasto,  $C_D$ , e a maximização do número de Nusselt,  $Nu_D$ , para o arranjo de cilindros. A Fig. 3 apresenta o comportamento do coeficiente de arrasto observado em cada cilindro como função das razões  $S_T/D$ . De uma forma geral, é observado que o arrasto aumenta à medida que o passo transversal também aumenta. No entanto, para os cilindros 2 e 3 o  $C_D$  apresenta comportamento assintótico e crescente com o aumento da razão  $S_T/D$ . O resultado de assimetria obtido para o cilindro 3 em comparação com o cilindro 2 é explicado pela formação dos campos de pressão atrás dos cilindros 2 e 3. Em um comportamento simétrico, seria esperado um comportamento igual para ambos os cilindros (2 e 3). Contudo, para o escoamento com 3 cilindros foi obtido um comportamento assimétrico se refletindo no coeficiente de arrasto para os dois cilindros. O cilindro 1, por ser o primeiro a receber a frente de fluxo, oferece menor resistência ao escoamento e, por consequência, tem seu coeficiente de arrasto menor em relação aos outros dois. Para a razão  $(S_T/D)_0 = 1,5$ , observa-se que o coeficiente de arrasto nos cilindros a jusante é muito menor do que para as outras razões de  $S_T/D$  e isso se deve ao fato de os cilindros estarem “escondidos” atrás do cilindro 1, o que faz com que os mesmos não imponham restrição significativa ao escoamento. Comportamento oposto é observado ao passo que a razão  $S_T/D$  vai aumentando (cilindros mais afastados), restringindo o escoamento e elevando o coeficiente de arrasto.

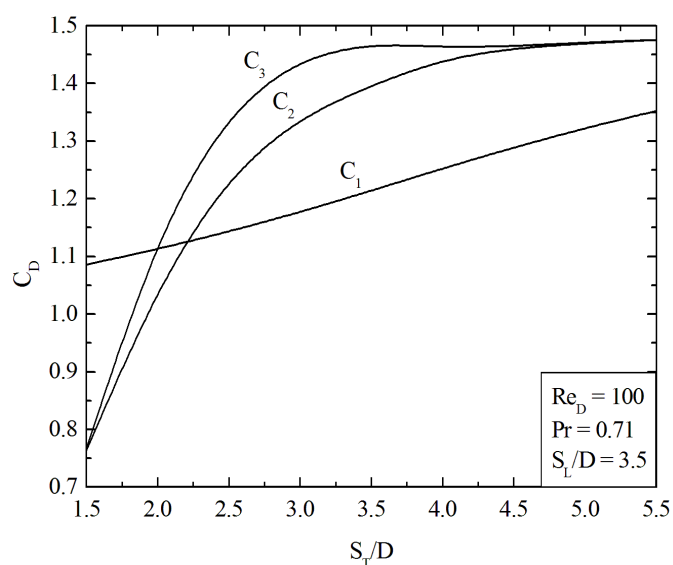


Figura 3: Efeito do parâmetro  $S_T/D$  sobre o coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) em cada cilindro para  $S_L/D = 3,5$  e para um escoamento a  $Re_D = 100$  e  $Pr = 0,71$ .

A avaliação da transferência de calor entre o arranjo de cilindros e a vizinhança é feita através do número de Nusselt para cada cilindro. A relação entre  $Nu_D$  e a razão  $S_T/D$  é apresentada na Fig. 4. É possível notar um comportamento bastante semelhante das curvas de  $Nu_D$  em relação aos resultados para os coeficientes de arrasto. Desta forma, uma maior troca de calor se dá para a maior razão  $S_T/D$ . Este comportamento é esperado, visto que uma vez estando os cilindros mais afastados a diferença de temperatura entre fluido e os cilindros é evidenciada. Para as razões menores de  $S_T/D$ , ou seja, com o espaçamento entre os corpos reduzido, o fluido atinge os cilindros 2 e 3 com uma temperatura mais elevada devido ao ganho de energia pelo contato antecipado com o cilindro 1, diminuindo assim a diferença de temperatura entre os mesmos e o fluido. Afetando diretamente no decréscimo do coeficiente de transferência de calor.

Outra observação diz respeito ao comportamento quase sobreposto das curvas de  $Nu_D$  para os cilindros 2 e 3. Diferentemente do ocorrido com o coeficiente de arrasto as mesmas são

basicamente coincidentes tanto em comportamento quanto em valores. Uma análise do campo de temperaturas pode melhor contribuir para a interpretação deste comportamento.

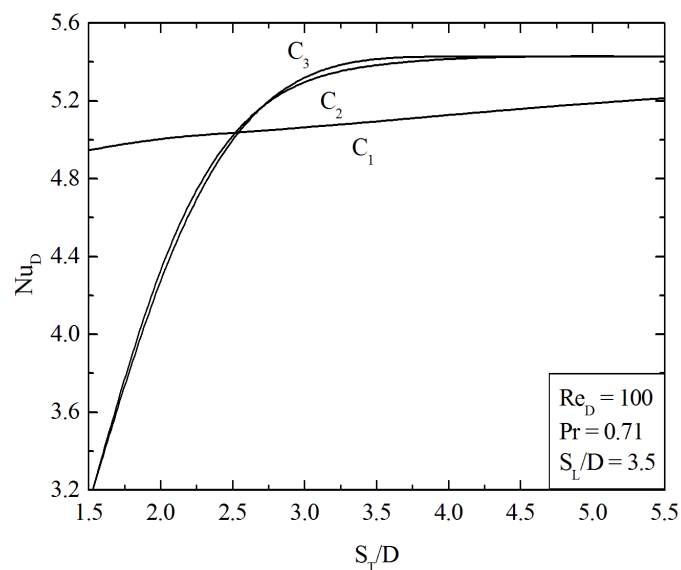


Figura 4: Efeito de  $S_T/D$  sobre o número de Nusselt ( $Nu_D$ ) em cada cilindro para  $S_L/D = 3,5$  e para um escoamento a  $Re_D = 100$  e  $Pr = 0,71$ .

A Fig. 5 descreve os comportamentos do coeficiente de arrasto,  $C_D$  (Fig. 5a), e número de Nusselt,  $Nu_D$  (Fig. 5b), para o arranjo de cilindros. Ambos os coeficientes foram obtidos através dos valores médios para os três cilindros. Nota-se o comportamento assintótico crescente para ambos os casos. No entanto, completamente opostos no que tange a melhor condição para cada um, ou seja, a melhor relação  $S_T/D$  em termos de  $C_D$  é  $(S_T/D)_o = 1,5$  (pois garante a melhor configuração para o mínimo arrasto). No que diz respeito à taxa de transferência de calor, a melhor disposição geométrica foi obtida para  $(S_T/D)_o = 5,5$ .

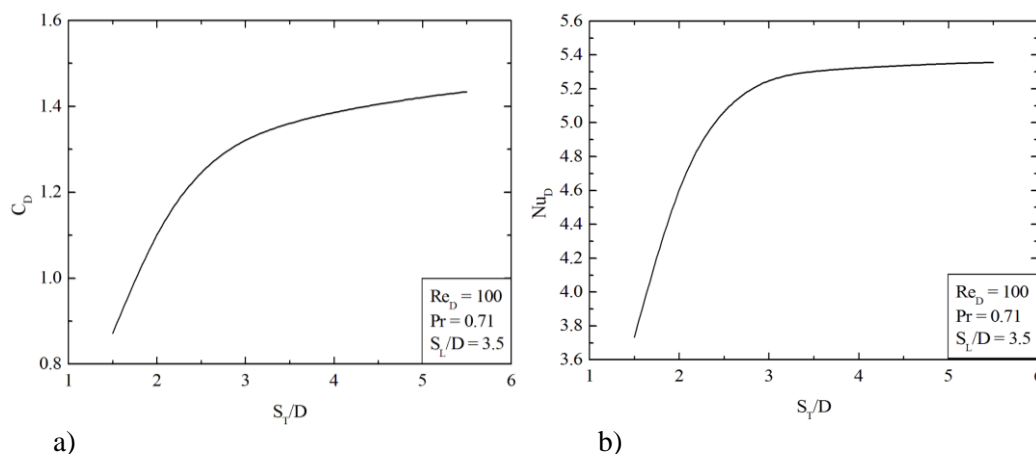


Figura 5: Efeito do parâmetro  $S_T/D$  sobre o arranjo triangular de cilindros: a) coeficiente de arrasto ( $C_D$ ), b) número de Nusselt ( $Nu_D$ ).

Contudo, há problemas em engenharia que possuem dependência dos dois objetivos, no caso do presente estudo podem ser encontradas situações onde o dimensionamento do sistema motriz e a taxa de transferência de calor possuem a mesma ordem de importância. Para estes casos a avaliação do problema deve ser feita de maneira a buscar dois objetivos: a melhor troca térmica aliada a um coeficiente de arrasto baixo. Para o presente estudo, a geometria ótima é obtida graficamente a partir do  $C_D$  em função de  $1/Nu_D$ , Fig. 6. O objetivo neste caso será minimizar as duas funções. De acordo com a Lei *Constructal*, para o caso apresentado, os valores da curva mais próximos aos pontos de início dos eixos abscissa e ordenada (0,18; 0,8) podem ser



considerados como indicativos de melhor configuração para o problema multiobjetivo. Assim, é possível inferir que a geometria ótima para o presente estudo considera um intervalo de razões  $S_T/D$  com valores na região de  $S_T/D \sim 2,0$ . Com os dados obtidos até o presente momento neste estudo, a razão  $(S_T/D)_o = 2,0$  é considerada ótima. Porém, justamente por se tratar de um problema multiobjetivo e no fato de que a Lei *Constructal* prevê um comportamento dinâmico para o *design* ótimo a busca por mais relações às quais possam confirmar a ótima disposição do arranjo de cilindros se faz necessária. Mesmo sem um refinamento maior na região de ótimo, os resultados mostram que a geometria ótima para o problema multiobjetivo ( $S_T/D \sim 2,0$ ) é mais próxima da geometria ótima do problema fluido dinâmico  $(S_T/D)_o = 1,5$  do que a geometria ótima para o problema térmico  $(S_T/D)_o = 5,5$ . Os resultados foram diferentes dos encontrados na Ref. [35] para um escoamento turbulento com convecção forçada sobre um par de cilindros, onde a geometria ótima para o problema multiobjetivo foi mais próxima à geometria ótima obtida para o problema térmico. Isso mostra que a faixa de ótimo do ponto de vista dos dois objetivos pode variar para regiões mais próximas da geometria ótima para o problema fluidodinâmico ou térmico, conforme as condições do problema, i.e., não há uma tendência universal para a geometria quando leva-se em consideração a função multiobjetivo.

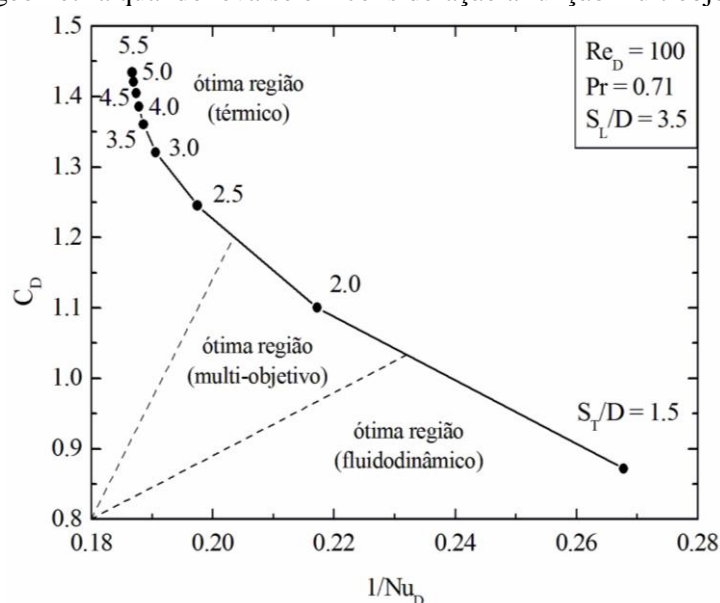


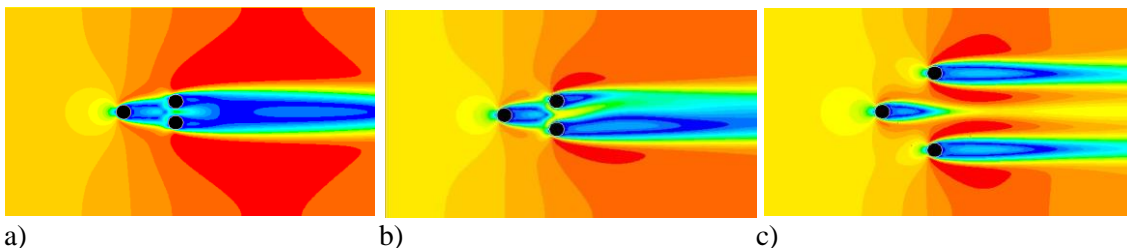
Figura 6: Efeito do parâmetro  $S_T/D$  sobre o coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) e sobre o inverso do número de Nusselt ( $Nu_D$ ).

A compreensão fenomenológica dos casos estudados passa pela análise dos campos de velocidade (Fig. 7), pressão (Fig. 8) e temperatura (Fig. 9). As topologias tem significativa importância na busca pela geometria ótima e são excelentes aliadas às análises feitas a partir da Lei *Constructal*. Para os três campos apresentados, as relações geométricas são para os valores de  $S_T/D = 1,5$  (melhor configuração fluidodinâmica),  $S_T/D = 2,0$  (melhor configuração multi-objetivo) e  $S_T/D = 5,5$  (melhor configuração térmica).

Na Fig. 7, para o campo de velocidades, é possível afirmar o suposto pela análise dos coeficientes de arrasto individuais apresentados na Fig. 3, onde o arrasto para os cilindros 2 e 3 é menor do que aquele no cilindro 1 pois os mesmos estão encobertos pela esteira do cilindro frontal (Fig. 7a), bem como o caso em que o arrasto é máximo para a disposição em que os cilindros estão mais afastados (Fig. 7c). Comportamento este já esperado uma vez que a área de contato com a frente de fluxo do escoamento é praticamente triplicada em relação ao primeiro caso.

A análise da Fig. 7b sugere uma tendência no desprendimento de vórtices de forma periódica, ou seja, alternando entre os cilindros 2 e 3. Isto fica evidenciado nas esteiras relativas a cada um destes cilindros. Assim, certamente o coeficiente de arrasto individual será afetado e não deve ser igual entre os cilindros 2 e 3. Isto explica a diferença entre as curvas para o arrasto destes

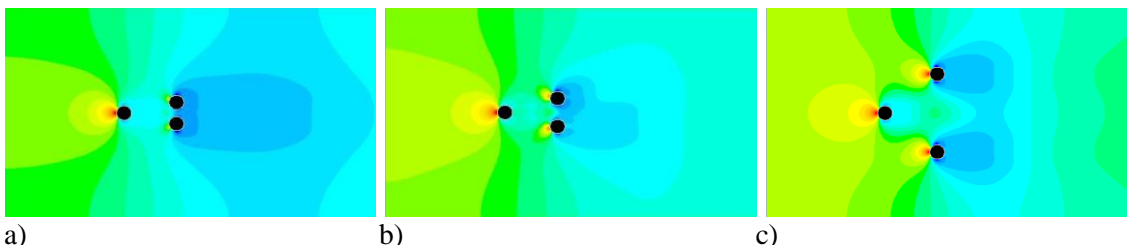
cilindros na Fig. 3 e é, novamente, confirmado quando o campo de pressões é apresentado (Fig. 8).



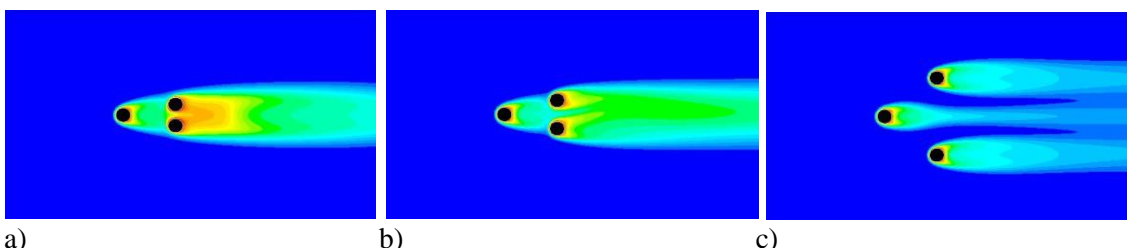
a) b) c)  
 Figura 7: Campos de velocidades para  $Re_D = 100$ ,  $Pr = 0,71$  e  $S_L/D = 3,5$  no instante de tempo  $t = 2,0$  s para os seguintes parâmetros: a)  $S_T/D = 1,5$ ; b)  $S_T/D = 2,0$  e c)  $S_T/D = 5,5$ .

O campo de pressões obtido para o caso da relação ótima  $S_T/D = 2,0$  deixa explícito que valores de pressão menores são encontrados para o cilindro 3 em relação ao cilindro 2. Esta pressão não simétrica entre os cilindros gera, conseqüentemente, valores de arrasto não simétricos. Como pode ser visto nas Figs. 8a e 8c o campo de pressão é simétrico, o que explica a proximidade das curvas de arrasto nas regiões próximas aos valores mais baixos e mais altos de arrasto (Fig. 3).

A Fig. 9, para o campo de temperaturas, confirma os resultados anteriores para  $Nu_D$ . A pior razão geométrica  $S_T/D = 1,5$  para o problema térmico é visualmente explícita pela observação da Fig. 9a. A troca térmica para o caso em que os cilindros estão geometricamente mais agrupados é significativamente afetada. Estando os cilindros 2 e 3 “escondidos” atrás do cilindro 1, os mesmos recebem por advecção a energia liberada pelo cilindro frontal, desta forma, estreitando a diferença de temperatura entre o escoamento e o arranjo e, por conseguinte, reduzindo a efetividade na troca de energia térmica. No outro extremo (Fig. 9c) em que os cilindros estão mais afastados, como aumenta a área de contato com o escoamento circundante (fato negativo para o  $C_D$ , conforme discutido anteriormente), aumenta também a troca térmica entre cilindros e o ar em torno do arranjo. Isto pode ser observado na Fig. 9c pela distribuição de temperaturas mais uniforme de uma forma geral.



a) b) c)  
 Figura 8: Campos de pressão para  $Re_D = 100$ ,  $Pr = 0,71$  e  $S_L/D = 3,5$  no instante de tempo  $t = 2,0$  s para os seguintes parâmetros: a)  $S_T/D = 1,5$ ; b)  $S_T/D = 2,0$  e c)  $S_T/D = 5,5$ .



a) b) c)  
 Figura 9: Campos de temperatura para  $Re_D = 100$ ,  $Pr = 0,71$  e  $S_L/D = 3,5$  no instante de tempo  $t = 2,0$  s para os seguintes parâmetros: a)  $S_T/D = 1,5$ ; b)  $S_T/D = 2,0$  e c)  $S_T/D = 5,5$ .

## 5. CONCLUSÕES

O presente trabalho avaliou a influência da geometria sobre o comportamento fluidodinâmico e térmico de um arranjo triangular de cilindros sobre o escoamento transiente, bidimensional, incompressível, laminar e com convecção forçada empregando o método *Constructal Design*. As simulações foram realizadas para escoamentos com números de Reynolds e Prandtl de  $Re_D = 100$  e  $Pr = 0,71$ . As equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia foram resolvidas com o uso do método de volumes finitos (FVM – do inglês: *Finite Volume Method*). A área ocupada pelos três cilindros foi a restrição geométrica do problema, enquanto as razões  $S_T/D$  (passo transversal sobre o diâmetro) e  $S_L/D$  (passo longitudinal sobre o diâmetro) foram os graus de liberdade. Vale destacar que os diâmetros dos três cilindros foram considerados iguais em todos os casos. O principal objetivo aqui foi avaliar qual razão  $S_T/D$  minimiza o coeficiente de arrasto e maximiza a taxa de transferência de calor (número de Nusselt) entre os cilindros e o escoamento circundante, i.e., um problema multiobjetivo. Em todos os casos foi considerada uma razão  $S_L/D = 3,5$ .

Em uma forma geral, os resultados mostraram uma forte dependência dos campos transientes fluidodinâmico e térmico com o arranjo dos cilindros circulares. Para os casos estudados, a menor razão  $S_T/D = 1,5$  conduziu à geometria ótima do ponto de vista fluidodinâmico, ou seja, é a geometria que conduz ao menor coeficiente de arrasto. Do ponto de vista térmico, a melhor geometria é obtida para a maior razão  $S_T/D = 5,5$ , onde todos os cilindros sofrem a ação da corrente livre do escoamento. Essas geometrias são obtidas quando o campo de pressões e temperaturas são distribuídos de forma mais homogênea, ou seja, de acordo com o princípio *Constructal* da “ótima distribuição das imperfeições”. Vale destacar ainda que, o emprego do *Constructal Design* permitiu uma melhora nos coeficientes de arrasto ( $C_D$ ) e número de Nusselt ( $Nu_D$ ) em 39% e 30%, respectivamente, em comparação com os piores casos.

Os resultados mostraram que para o problema multiobjetivo a geometria ótima foi obtida para  $S_T/D \sim 2,0$ , ou seja, não foi a geometria ótima obtida para o problema fluidodinâmico, onde  $(S_T/D)_o = 1,5$ , nem a geometria ótima do problema térmico,  $(S_T/D)_o = 5,5$ . Foi observado para este caso que a geometria ótima do problema multiobjetivo foi mais próxima da geometria ótima do problema fluidodinâmico do que do problema térmico, contrariamente ao observado na Ref. [35] para um escoamento turbulento com convecção forçada sobre um par de cilindros, onde a geometria ótima para o problema multiobjetivo foi mais próxima da geometria ótima obtida para o problema térmico. Dessa forma, a geometria ótima multiobjetivo pode variar conforme as condições do escoamento. A análise da geometria para outras condições de  $S_L/D$  bem como para escoamentos com outros números de Reynolds está em andamento para futuros estudos.

## 6. AGRADECIMENTOS

Professor E. D. dos Santos é apoiado pela FAPERGS (Processo: 12/1418-4). Professor L. A. O. Rocha agradece ao CNPq pelo apoio financeiro.

- 
1. Çengel YA, Cimbala JM. *Fluid Mechanics: fundamentals and application*. New York. McGraw-Hill; 2006.
  2. Rajani BN, Kandasamy A, Majumdar S. Numerical Simulation of Laminar Flow Past a Circular Cylinder. *Appl. Math. Model.* 2009; 33: 1228-47.
  3. Franke J, Frank W. Large Eddy Simulation of the Flow Past a Circular Cylinder at  $Re_D=3900$ . *Journal Wind Eng. Ind. Aerod.* 2002; 90:1191-1206.
  4. Catalano P, Wang M, Iaccarino G, Moin P. Numerical Simulation of the Flow around a Circular Cylinder at High Reynolds Numbers. *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2003; 24:463-469.
  5. Sahu AK, Chhabra RP, Eswaran V. Effects of Reynolds and Prandtl Numbers on Heat Transfer from a Square Cylinder in the Unsteady Flow Regime. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2009; 52: 839-850.
  6. Bejan A, Lorente S. *Constructal Law of Design and Evolution: Physics, biology, technology and society*. *J. Appl. Phys.* 2013; 113: 151301.
  7. Bejan A, Zane JP. *Design in Nature*. New York, Doubleday; 2012.

8. Bejan A, Lorente S. *Design with Constructal Theory*. Wiley, Hoboken; 2008.
9. Bejan A. *Shape and Structure, from Engineering to Nature*. Cambridge University Press, Cambridge, UK; 2000.
10. Bejan A, Lorente S. The Constructal Law and the Evolution of Design in Nature. *Phys. Life Rev.* 2011; 8: 209-240.
11. Bejan A, Lorente S. The Constructal Law of Design and Evolution in Nature. *Phil. Trans. R. Soc.*, B365. 2010; 1335- 1347.
12. Reis AH. Constructal Theory: from Engineering to Physics, and How Flow Systems Develop Shape and Structure. *Appl. Mech. Rev.* 2006; 59: 269 – 282.
13. Chen L. Progress in the Study on Constructal Theory and its Applications. *Sci. China Tech Sci.* 2012; 55 (3): 802 – 820.
14. Bejan A, Badescu V, De Vos A. Constructal Theory of Economics Structure Generation in Space and Time. *Energy Convers. Manage.* 2000; 41:1429 – 1451.
15. Bejan A, Lorente S. Constructal Theory of Generation of Configuration in Nature and Engineering. *J. Appl. Phys.* 2006; 100: 041 – 301.
16. Beyene A, Peffley J. Constructal Theory, Adaptive Motion and their Theoretical Application to Low-Speed Turbine Design. *J. Energ. Eng-ASCE.* 2009; 135 (4): 112 – 118.
17. Kang D –H, Lorente S, Bejan A. Constructal Dendritic Configuration for the Radiation Heating of a Solid Stream. *J. Appl. Phys.* 2010; 107: 114910.
18. Kim Y, Lorente S, Bejan A. Constructal Multi-Tube Configuration for Natural and Forced Convection in Cross-Flow. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2010; 53: 5121 – 5128.
19. Kim Y, Lorente S, Bejan A. Steam Generator Structure: Continuous Model and Constructal Design. *Int. J. Energy Res.* 2011; 35: 336 – 345.
20. Azad AV, Amidpour M. Economic Optimization of Shell and Tube Heat Exchanger Based on Constructal Theory. *Energy.* 2011; 36: 1087 – 1096.
21. Song C –J, Chang K –S. Heat Transfer and Interactive Buoyant Vortex Shedding by a Pair of Circular Cylinders in Transverse Arrangement. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1991; 34: 1347 – 1354.
22. Meinders ER, Hanjalic K. Vortex Structure and Heat Transfer in Turbulent Flow over a Wall-Mounted Matrix of Cubes. *Int. J. Heat Fluid Flow.* 1999; 20: 255 – 267.
23. Sewall EA, Tafti DK. Experimental Validation of Large Eddy Simulations of Flow and Heat Transfer in a Stationary Ribbed Duct. *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2006; 27: 243 – 258.
24. Yang Y –T, Chen C. –H. Numerical Transfer Characteristics of Heated Blocks in the Channel with an Oscillating Cylinder. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2008; 51: 1603 – 1612.
25. Sumner D. Two Circular Cylinders in Cross-Flow: a Review. *J. Fluid Struct.* 2010; 26: 849 – 899.
26. Alam MM, Zhou Y. Strouhal Numbers, Forces and Flow Structures around Two Tandem Cylinders of Different Diameters. *J. Fluid Struct.* 2008; 24: 505 – 526.
27. Hesam S –M, Navid N. Numerical Simulation of Flow over Two Side-by-Side Circular Cylinders. *J. Hydrodynamics.* 2011; 23 (6): 792 – 805.
28. Bello-Ochende T, Lienbenberg L, Malan AG, Bejan A, Meyer JP. Constructal conjugate heat transfer in three-dimensional cooling channels. *J. Enhanc. Heat Transf.* 2007; 14: 279 – 293.
29. Bello-Ochende T, Lienbenberg L, Bejan A. Constructal cooling channels for micro-channel heat sinks. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2007; 50: 4141 – 4150.
30. Bello-Ochende T, Lienbenberg L, Malan AG, Bejan A, Meyer JP. Constructal ducts with wrinkled entrances. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2009; 52: 3628 – 3633.
31. Bello-Ochende T, Bejan A. Constructal Multi-Scale Cylinders with Natural Convection. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2005; 48: 4300 – 4306.
32. Silva AK, Bejan A. Constructal Multi-Scale Structure for Maximal Heat Transfer Density in Natural Convection. *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2005; 26: 34 – 44.
33. Bello-Ochende, T, Meyer JP, Ogunronbi OI. Constructal Multiscale Cylinders Rotating in Cross-Flow. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2011; 54: 2568 – 2577.
34. Rocha LAO, Gomes MN, Porte AF, Galarça MM, Acunha Jr IC, da Silva FMV, Isoldi LA, Dos Santos ED. Constructal Design of Turbulent Forced Convective Flows over a Pair of Circular cylinders. In: *Constructal Law Conference, Nanjing. Proceedings of Constructal Law Conference, 2013; 1: 174-184.*
35. Dos Santos ED, Dallagnol A, Petry AP, Rocha LAO. Heat Transfer Optimization of Cross-Flow Over Assemblies of Bluff Bodies Employing Constructal Principle. In: *COBEM 2009, Gramado. 20th Mechanical Congress of Mechanical Engineering; 2009.*
36. Bejan A. *Convection Heat Transfer*, John Wiley, Durham, USA; 2004.
37. *Fluent (version 13.0)*, ANSYS, Inc.; 2010.

- 
38. Patankar SV. Numerical heat transfer and fluid flow, McGraw Hill, New York, USA; 1980.
  39. Versteeg HK, Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics – the finite volume method, Pearson, England; 2007.
  40. Hilpert R. Heat transfer from cylinders, *Forsch. Geb. Ingenieurwes.* 1933; 4: 215.
  41. Churchill SW, Bernstein M. A Correlation Equation for Forced Convection from Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Cross Flow, *ASME J. Heat Transfer.* 1977; 94: 300 – 306.