

# Esferas de Equilíbrio e Algumas Estimações de Processo de Contração Gravitacional

A. Smirnov<sup>1</sup>; R.M.M. Oliveira<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49060-100, Aracaju-Sergipe, Brasil*

<sup>2</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49060-100, Aracaju-Sergipe, Brasil*

*smirnov@ufs.br, smirnov.globe@gmail.com*

*ricardoxam@gmail.com*

*(Recebido em 14 de novembro de 2013; aceito em 16 de janeiro de 2015)*

---

Na primeira parte do trabalho discutimos estados de corpos sujeitos a ação da força gravitacional usando um modelo hidrodinâmico. Obtemos uma condição para o estado de equilíbrio de um corpo na forma de uma equação diferencial que relaciona a distribuição de pressão e densidade de massa no corpo. Foram consideradas as distribuições de densidade de forma constante, potencial, exponencial e gaussiana. Foram obtidas as expressões exatas para distribuição de massa e pressão. Os resultados também são apresentados graficamente. Na segunda parte discutimos processos de contração de um corpo esférico em termos de Mecânica Newtoniana usando modelo de poeira. Foi obtida a expressão para estimação do tempo de contração até o raio gravitacional do corpo. São apresentados valores do tempo de contração para os casos de corpo inicial de tamanho estelar e de tamanho de estrela de nêutrons.

Palavras-chave: esfera de equilíbrio, modelo hidrodinâmico, contração gravitacional

## **Equilibrium Spheres and Some Estimates of Processes of Gravitational Contraction.**

In the first part of the work we discuss states of objects subjected to the action of the gravitational force using a hydrodynamic model. We obtain a condition for the state of equilibrium of an object in the form of a differential equation which relates the pressure distribution and mass density in the object. There were considered the density distributions of the form: constant, potential, exponential and Gaussian. There were obtained exact expressions for the distributions of mass and pressure. The results are also presented graphically. In the second part of the work we discuss processes of contraction of a spherical body in terms of Newtonian Mechanics using dust model. There was obtained the expression for estimate of the contraction time to the gravitational radius of the body. Figures of the contraction time for initial body of a stellar and neutron star size are shown.

Keywords: equilibrium sphere, hydrodynamic model, gravitational contraction

---

## **1 Introdução**

De acordo com uma visão moderna uma estrela é considerada como uma esfera massiva de gás (ou mais exato de plasma), mantida íntegra pela força de gravitação própria. A estrutura interna de estrelas é bastante complicada e depende de massa estelar. Para estrelas de massa solar (0,5-1,5 de massa solar) da sequência principal da diagrama de Hertzsprung-Russell a estrutura interna inclui: um núcleo, uma zona de radiação e uma zona de convecção. As estrelas massivas (com massa maior de 1,5 de massa de Sol) possuem núcleo convectivo acima de qual é localizada a zona de radiação (ou um envelope de radiação). Nas estrelas de massa menor de 0,5 de massa de Sol a zona de radiação é ausente (diz-se que estrelas possuem um envelope de convecção). Nas estrelas da sequência principal a energia está sendo gerada pela queima de hidrogênio em hélio através de fusão nuclear em seu núcleo. Na classificação de estrelas fora da sequência principal são distinguidas estrelas de tipos: subgigantes, gigantes, gigantes luminosas, supergigantes, hipergigantes, sub-anãs, estrelas retardatárias azuis. Nas estrelas destes tipos a energia é gerada principalmente pelo mecanismo de fusão nuclear. Além disso são consideradas as estrelas pré-sequência principal. A fonte de energia desses objetos é causada somente pela contração gravitacional em oposição à fusão nuclear em estrelas de outros tipos. Estrelas de

vários tipos possuem características específicas de estrutura, mecanismos da produção e transporte de energia. Para alguns tipos de estrelas são construídos os bons modelos que descrevem adequadamente as características observadas das estrelas, para outros tipos os modelos estão em processo de construção e discussão.

O modelo mais simples de estrutura estelar é a aproximação quase-estática de simetria esférica. Uma discussão desse modelo é apresentada em Refs. [1], [2]. O modelo assume que a estrela possui simetria esférica e está em estado de equilíbrio hidrostático. O modelo é baseado em um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Duas equações descrevem variação de matéria e pressão na direção radial. Outras equações descrevem variação da luminosidade e transporte de energia. Para determinação da luminosidade, precisa da característica taxa de produção de energia. Esta característica é determinada através de um mecanismo principal de transporte de energia: radiação ou convecção. O conjunto das equações do modelo compõe um sistema das equações não lineares, que pode ser resolvido em geral por métodos numéricos.

De fato nesse modelo as duas equações para matéria e pressão são desacopladas das outras equações, pois elas não contém parâmetros como temperatura, taxa de produção de energia, luminosidade, portanto podem ser consideradas separadamente. Impondo uma função da distribuição de densidade da matéria na estrela, é possível obter a distribuição de pressão. Adicionando uma equação de estado para parâmetros termodinâmicos, como por exemplo a equação de estado de um gás perfeito, é possível calcular a temperatura na estrela. Adicionando ainda uma relação apropriada para taxa de produção de energia, é possível estimar a luminosidade da estrela. De tal maneira pode ser construído um modelo analítico. Claro que esse modelo é simplificado, mas permite fazer estimações de algumas características principais de estrela, tais como: densidade central, temperatura central, luminosidade em termos de raio e massa de estrela. Tal forma de construção de modelo analítico foi discutida em Ref. [3], onde foi usada a distribuição de densidade na forma linear, chamado modelo linear de estrela. Entretanto, o uso da densidade na forma linear não parece muito realístico.

Nesse pequeno trabalho usamos os modelos analíticos com várias distribuições de densidade com aspectos mais realísticos. Uma peculiaridade dos modelos propostos no trabalho é a possibilidade de resolver as equações diferenciais analiticamente. No trabalho focalizamos na obtenção da distribuição de pressão na direção radial e pressão central, ignorando a determinação de outros parâmetros. Discutimos os modelos com distribuições de densidade das formas potencial, exponencial e gaussiana. No início discutimos também um modelo com densidade constante para demonstrar transparentemente os passos realizados nos cálculos, e para introduzir notações usadas posteriormente. As distribuições de massa e de pressão obtemos na forma analítica. Para realizar os cálculos foram usados vários métodos de física matemática disponíveis na literatura, por exemplo [4], [5], [6]. Para visualização e comparação dos resultados apresentamos também os resultados graficamente. Na conclusão discutimos os resultados obtidos e suas aplicações possíveis.

Na segunda parte do trabalho apresentamos na forma bem detalhada estimação de tempo de contração gravitacional de um corpo esférico em modelo de poeira na abordagem da Mecânica Newtoniana. Para descrever o processo na forma mais realística foi discutida a contração do corpo até o seu raio gravitacional. O problema é levada a estimação de uma integral imprópria com um limite variável. A estimação da integral foi realizada com uso de decomposição em série da função na integral.

## 2. Esferas de Equilíbrio

Consideramos uma esfera de gás esfericamente simétrico de raio  $R$  em estado de equilíbrio. A coordenada radial  $r$  dentro varia como  $0 < r < R$ . Escolhemos um fragmento infinitesimal de volume  $dV$  dentro da esfera. As forças que atuam no fragmento de volume  $dV$  são forças de pressão e força gravitacional. Em estado de equilíbrio a força resultante é nula (força gravitacional é equilibrada pela força de pressão), portanto (Ver Fig. 1).

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} = 0 \quad (1)$$

onde:

$$F_g = G \frac{M_r dm}{r^2}, F_{p1} = p_1 \Delta s, F_{p2} = p_2 \Delta s \quad (2)$$

$dm = \rho dV = \rho dr \Delta s$  é a massa do fragmento infinitesimal considerado,  $\rho$  é a densidade da substância de gás,  $p_1 = p(r), p_2 = p(r + dr)$  são pressões nos pontos indicados,  $\Delta s$  é um elemento infinitesimal de área perpendicular a direção radial,  $M_r$  é a massa dentro da esfera de raio  $r$ .

$$M_r = \int_0^r 4\pi\rho(r)r^2 dr \quad (3)$$

Levando em conta os sentidos das forças temos:

$$-G \frac{M_r \rho dr \Delta s}{r^2} + p(r) \Delta s - p(r + dr) \Delta s = 0 \quad (4)$$

Apresentando a diferença das pressões nos pontos próximos

$$p(r) - p(r + dr) = \frac{dp}{dr} dr \quad (5)$$

Chegamos à equação diferencial ordinária

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} \quad (6)$$

que relaciona a função de distribuição de densidade da substância de gás  $\rho(r)$  e pressão  $p(r)$ . Na superfície da esfera a pressão é nula. Obtemos assim a condição de contorno no ponto  $r = R$

$$p(R) = 0 \quad (7)$$

Mostraremos várias formas de distribuição de densidade da substância na esfera que faz com que obtenhamos soluções exatas para distribuição de pressão.

## 2.1 Densidade Constante

Escolhemos que a densidade da substância dentro da esfera seja constante

$$\rho(r) = \rho_0 = const \quad (8)$$

Pela Eq. (3) temos para  $M_r$

$$M_r = \int_0^r 4\pi\rho_0 r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \quad (9)$$

Sendo que a massa total da esfera é

$$M_R = \frac{4\pi\rho_0}{3}R^3 \quad (10)$$

Para determinação de  $p(r)$  da Eq. (6) temos a equação diferencial

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{4\pi\rho_0}{3} R^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{\rho_0}{r^2}$$

ou

$$\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R \frac{r}{R} \quad (11)$$

com a condição de contorno (7). Resolvendo a Eq. (11), temos

$$p(r) - p_0 = -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R^2 \int_0^r \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right) = -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R^2 \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

onde  $p_0 = p(0)$  é a pressão no ponto  $r = 0$ . Aplicando a condição de contorno (7), obtemos

$$p_0 = \frac{1}{2} \frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R^2 \quad (12)$$

$$p(r) = \frac{4\pi G\rho_0^2}{3} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (13)$$

As distribuições de  $\rho(r)$ ,  $M_r(r)$ ,  $p(r)$  são mostrados na Fig. 2.

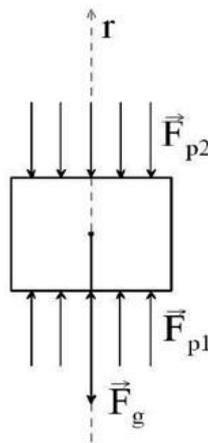


Figura 1: Esquema das forças.

## 2.2 Função de Distribuição da Densidade na Forma Potencial

Escolhemos a distribuição de densidade da substância na forma potencial

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^n}{R^n}\right) \quad (14)$$

Pela Eq. (3) temos para  $M_r$

$$\begin{aligned} M_r &= \int_0^r 4\pi\rho_0 \left(1 - \frac{r^n}{R^n}\right) r^2 dr = 4\pi\rho_0 R^3 \int_0^r \left(1 - \frac{r^n}{R^n}\right) \frac{r^2}{R^2} d\left(\frac{r}{R}\right) \\ &= 4\pi\rho_0 R^3 \left[ \int_0^r \frac{r^2}{R^2} d\left(\frac{r}{R}\right) - \int_0^r \frac{r^{n+2}}{R^{n+2}} d\left(\frac{r}{R}\right) \right] \\ &= 4\pi\rho_0 R^3 \left[ \frac{1}{3} \frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{n+3} \frac{r^{n+3}}{R^{n+3}} \right] = \frac{4\pi\rho R^3}{3} \frac{r^3}{R^3} \left[ 1 - \frac{3}{n+3} \frac{r^n}{R^n} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

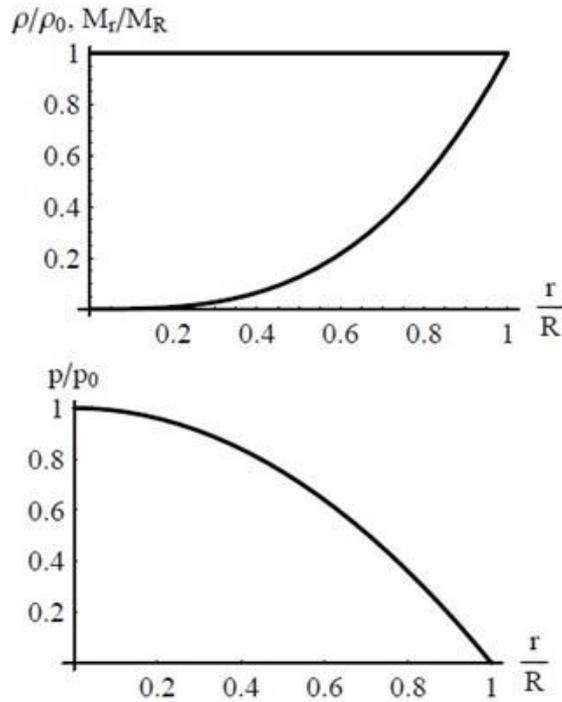


Figura 2: Distribuição de  $\rho, M_r, p$  para  $\rho = const.$

sendo que a massa da esfera é

$$M_R = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} \left[ 1 - \frac{3}{n+3} \right] = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} \frac{n}{n+3} \quad (16)$$

Para determinação de  $p(r)$  da Eq. (6) temos a equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -G \frac{4\pi\rho_0 R^3 r^3}{3 R^3} \left(1 - \frac{3 r^n}{n + 3 R^n}\right) \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{4\pi\rho_0^2 R r}{3 R} \left(1 - \frac{n + 6 r^n}{n + 3 R^n} + \frac{3 r^{2n}}{n + 3 R^{2n}}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Resolvendo a Eq. (17), temos

$$\begin{aligned} p(r) - p_0 &= -\frac{4\pi\rho_0^2}{3} R^2 \int_0^r \frac{r}{R} \left(1 - \frac{n + 6 r^n}{n + 3 R^n} + \frac{3 r^{2n}}{n + 3 R^{2n}}\right) d\left(\frac{r}{R}\right) \\ &= -\frac{4\pi\rho_0^2}{3} R^2 \left[ \int_0^r \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{n + 6}{n + 3} \int_0^r \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}} d\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{3}{n + 3} \int_0^r \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+1}} d\left(\frac{r}{R}\right) \right] \end{aligned}$$

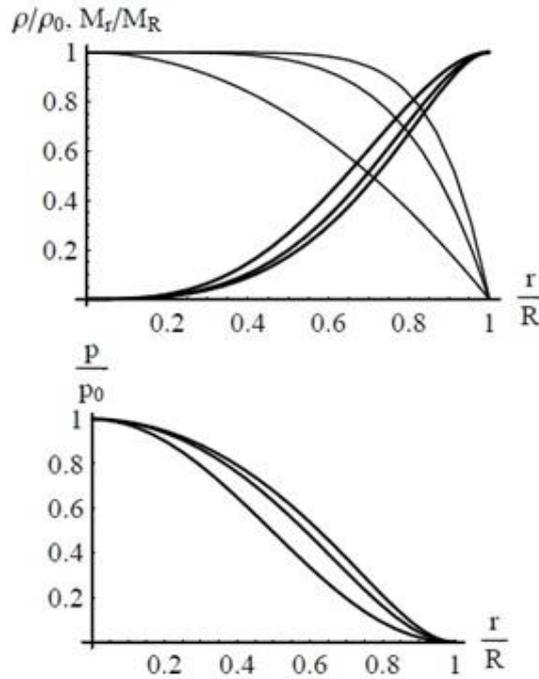


Figura 3: Distribuição de  $\rho, Mr, p$  para  $\rho$  na forma potencial com  $n = 2,5,8$  ( $M_r$  são funções crescentes).

$$\begin{aligned} &= -\frac{4\pi\rho_0^2}{3} R^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} - \frac{n + 6}{(n + 3)(n + 2)} \frac{r^{n+2}}{R^{n+2}} + \frac{3}{(n + 3)(2n + 2)} \frac{r^{2n+2}}{R^{2n+2}} \right] \\ &= -\frac{4\pi\rho_0^2}{3} R^2 \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \left[ 1 - \frac{2(n + 6)}{(n + 3)(n + 2)} \frac{r^n}{R^n} + \frac{3}{(n + 3)(n + 1)} \frac{r^{2n}}{R^{2n}} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Aplicando a condição de contorno (7), obtemos

$$p_0 = \frac{4\pi\rho_0^2}{3} R^2 \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2(n + 6)}{(n + 3)(n + 2)} + \frac{3}{(n + 3)(n + 1)} \right] \quad (19)$$

portanto

$$p(r) = \frac{4\pi\rho_0^2}{3} R^2 \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{2(n+6)}{(n+3)(n+2)} + \frac{3}{(n+3)(n+1)} \frac{r^{2n}}{R^{2n}} \right) - \frac{r^2}{R^2} \left( 1 - \frac{2(n+6)}{(n+3)(n+2)} \frac{r^n}{R^n} + \frac{3}{(n+3)(n+1)} \frac{r^{2n}}{R^{2n}} \right) \right\} \quad (20)$$

As distribuições de  $\rho(r)$ ,  $M_r(r)$ ,  $p(r)$  são mostradas na Fig. 3 para  $n = 2,5,8$ . No gráfico as distribuições de  $M_r(r)$  são funções crescentes. Observamos também que na função de distribuição de densidade (14) a potência  $n$  não é necessariamente um número inteiro e pode ser qualquer real  $n > 1$ .

### 2.3 Função de Distribuição da Densidade na Forma Exponencial

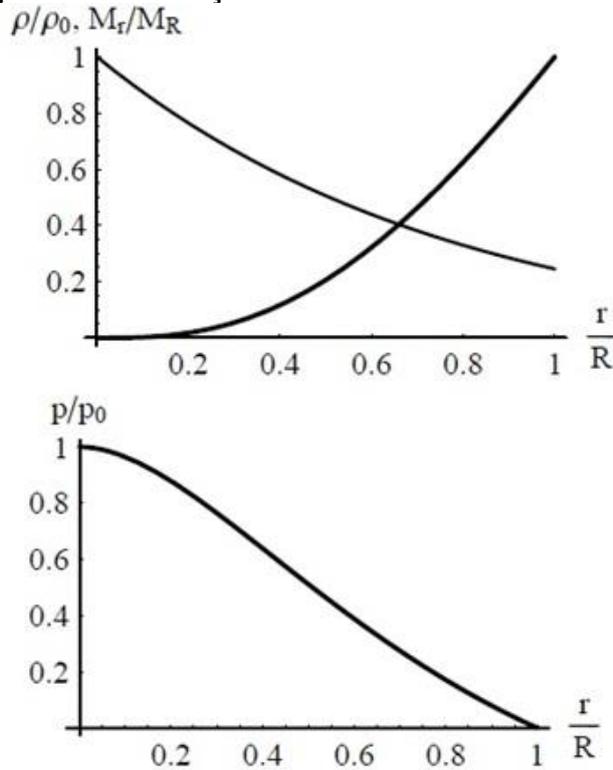


Figura 4: Distribuição de  $\rho, M_r, p$  para  $\rho$  na forma exponencial ( $M_r$  é uma função crescente).

Escolhemos a distribuição de densidade da substância na forma

$$\rho(r) = \rho_0 \left[ 1 - \frac{r}{3R} \right] e^{-\frac{r}{R}} \quad (21)$$

sendo que

$$\rho(R) = \rho_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] \frac{1}{e} = \frac{2}{3e} \rho_0 \quad (22)$$

Pela Eq. (3) temos para  $M_r$

$$M_r = 4\pi\rho_0 \int_0^r \left[1 - \frac{r}{3R}\right] e^{-\frac{r}{R}} r^2 dr = 4\pi\rho_0 R^3 \int_0^{\frac{r}{R}} \left[1 - \frac{r}{3R}\right] e^{-\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\left(\frac{r}{R}\right) \quad (23)$$

Na Eq. (23)

$$\int_0^{\frac{r}{R}} e^{-\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right)^3 d\left(\frac{r}{R}\right) = -\left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-\frac{r}{R}} + 3 \int_0^{\frac{r}{R}} e^{-\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\left(\frac{r}{R}\right) \quad (24)$$

Portanto

$$M_r = \frac{4\pi\rho_0}{3} R^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-\frac{r}{R}} \quad (25)$$

sendo que a massa total da esfera é

$$M_R = \frac{4\pi\rho_0}{3} R^3 \quad (26)$$

que permite também escrever  $M_r$  como

$$M_r = M_R \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{1-\frac{r}{R}} \quad (27)$$

Para determinação de  $p(r)$  da Eq. (6) temos a equação diferencial

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} R^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-\frac{r}{R}} \rho_0 \left[1 - \frac{r}{3R}\right] e^{-\frac{r}{R}} \frac{1}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R \frac{r}{R} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r}{R}\right) e^{-2\frac{r}{R}} \quad (28)$$

Resolvendo a Eq. (28), temos

$$\begin{aligned} p(r) - p_0 &= -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R^2 \int_0^{\frac{r}{R}} \frac{r}{R} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r}{R}\right) e^{-2\frac{r}{R}} d\left(\frac{r}{R}\right) \\ &= -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R^2 \left[ \int_0^{\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right) e^{-2\frac{r}{R}} d\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 e^{-2\frac{r}{R}} d\left(\frac{r}{R}\right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Na Eq. 29

$$\int_0^{\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 e^{-2\frac{r}{R}} d\left(\frac{r}{R}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 e^{-2\frac{r}{R}} + \int_0^{\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right) e^{-2\frac{r}{R}} d\left(\frac{r}{R}\right) \quad (30)$$

portanto

$$p(r) - p_0 = -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R^2 \left[ \frac{2}{3} \int_0^{\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right) e^{-2\frac{r}{R}} d\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{R}\right)^2 e^{-2\frac{r}{R}} \right] \quad (31)$$

A integral

$$\int_0^{\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right) e^{-2\frac{r}{R}} d\left(\frac{r}{R}\right) = -\frac{1}{2} e^{-2\frac{r}{R}} \left(\frac{r}{R} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \quad (32)$$

portanto

$$p(r) - p_0 = -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3}R^2 \left[ \frac{1}{6} + \left( -\frac{1}{6} - \frac{1}{3R}r + \frac{1}{6}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) e^{-2\frac{r}{R}} \right] \quad (33)$$

Aplicando a condição de contorno (7), obtemos

$$p_0 = G \frac{4\pi\rho_0^2}{3}R^2 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{3e^2} \right) \quad (34)$$

portanto

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{4\pi G\rho_0^2}{3}R^2 \left[ \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{3e^2} \right) - \left( \frac{1}{6} + \left( -\frac{1}{6} - \frac{1}{3R}r + \frac{1}{6}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) e^{-2\frac{r}{R}} \right) \right] \\ &= \frac{4\pi G\rho_0^2}{3}R^2 \frac{1}{3e^2} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) e^{2\left(1-\frac{r}{R}\right)} - 1 \right] \end{aligned} \quad (35)$$

As distribuições de  $\rho(r)$ ,  $M(r)$ ,  $p(r)$ , São mostradas na Fig. 4

#### 2.4 Função de Distribuição da Densidade na Forma Gaussiana

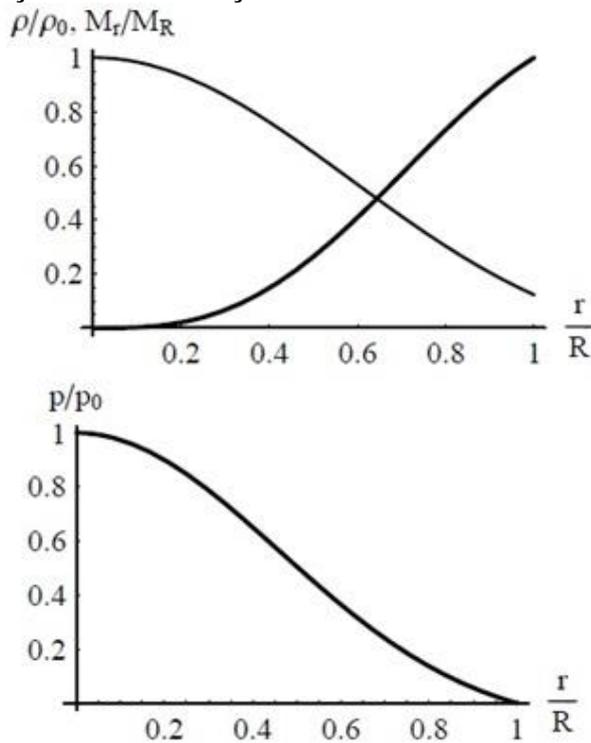


Figura 5: Distribuição de  $\rho, M_r, p$  para  $\rho$  na forma gaussiana ( $M_r$  é uma função crescente).

Escolhemos a distribuição de densidade da substância na forma gaussiana

$$\rho(r) = \rho_0 \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{r^2}{R^2} \right] e^{-\frac{r^2}{R^2}} \quad (36)$$

sendo que

Pela Eq. (3) temos para  $M_r$

$$M_r = 4\pi\rho_0 \int_0^r \left[ 1 - \frac{2r^2}{3R^2} \right] e^{-\frac{r^2}{R^2}} r^2 dr \quad (37)$$

$$= 4\pi\rho_0 R^3 \int_0^r \left[ 1 - \frac{2r^2}{3R^2} \right] e^{-\frac{r^2}{R^2}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$= 4\pi\rho_0 R^3 \left[ \int_0^r e^{-\frac{r^2}{R^2}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{2}{3} \int_0^r e^{-\frac{r^2}{R^2}} \left(\frac{r}{R}\right)^4 d\left(\frac{r}{R}\right) \right] \quad (38)$$

Observando que

$$de^{-x^2} = -2xe^{-x^2} dx \quad (39)$$

temos para a integral

$$\begin{aligned} \int_0^r e^{-\frac{r^2}{R^2}} \left(\frac{r}{R}\right)^4 d\left(\frac{r}{R}\right) &= -\frac{1}{2} \int_0^r \left(\frac{r}{R}\right)^3 de^{-\frac{r^2}{R^2}} = -\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{R^2}} \right]_0^r - \int_0^r e^{-\frac{r^2}{R^2}} d\left(\frac{r}{R}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{R^2}} - 3 \int_0^r e^{-\frac{r^2}{R^2}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\left(\frac{r}{R}\right) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

que dá

$$M_r = 4\pi\rho_0 R^3 \left[ \int_0^r e^{-\frac{r^2}{R^2}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{R^2}} - \int_0^r e^{-\frac{r^2}{R^2}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\left(\frac{r}{R}\right) \right] \quad (41)$$

Portanto

$$M_r = \frac{4\pi\rho_0}{3} R^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{R^2}} \quad (42)$$

Sendo que a massa total da esfera é

$$M_R = \frac{4\pi\rho_0}{3e} R^3 \quad (43)$$

Que permite também escrever  $M_r$  como

$$M_r = M_R \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{1-\frac{r^2}{R^2}} \quad (44)$$

Para determinação de  $p(r)$  da Eq. (6) temos a equação diferencial

$$\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi G\rho_0}{3} R^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{R^2}} \rho_0 \left[ 1 - \frac{2r^2}{3R^2} \right] e^{-\frac{r^2}{R^2}} \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi G\rho_0^2}{3} R \frac{r}{R} \left[ 1 - \frac{2r^2}{3R^2} \right] e^{-2\frac{r^2}{R^2}} \quad (45)$$

Resolvendo a Eq. (11), temos

$$\begin{aligned} p(r) - p_0 &= -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3}R^2 \int_0^r \frac{r}{R} \left[1 - \frac{2r^2}{3R^2}\right] e^{-2\frac{r^2}{R^2}} d\frac{r}{R} \\ &= -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3}R^2 \left[ \int_0^r \frac{r}{R} e^{-2\frac{r^2}{R^2}} d\frac{r}{R} - \frac{2}{3} \int_0^r \frac{r^3}{R^3} e^{-2\frac{r^2}{R^2}} d\frac{r}{R} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

Na Eq. (46) a integral

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{r^3}{R^3} e^{-2\frac{r^2}{R^2}} d\frac{r}{R} &= -\frac{1}{4} \left[ \int_0^r \frac{r^2}{R^2} d e^{-2\frac{r^2}{R^2}} \right] = -\frac{1}{4} \left[ \frac{r^2}{R^2} e^{-2\frac{r^2}{R^2}} - \int_0^r e^{-2\frac{r^2}{R^2}} d\frac{r^2}{R^2} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[ \frac{r^2}{R^2} e^{-2\frac{r^2}{R^2}} + \frac{1}{2} \left( e^{-2\frac{r^2}{R^2}} - 1 \right) \right] = -\frac{1}{4} \left[ \left( \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{2} \right) e^{-2\frac{r^2}{R^2}} - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

E a integral

$$\int_0^r \frac{r}{R} e^{-2\frac{r^2}{R^2}} d\frac{r}{R} = \frac{1}{2} \int_0^r e^{-2\frac{r^2}{R^2}} d\left(\frac{r^2}{R^2}\right) = -\frac{1}{4} \int_0^r e^{-\frac{2r^2}{R^2}} d\left(-\frac{2r^2}{R^2}\right) = -\frac{1}{4} \left( e^{-\frac{2r^2}{R^2}} - 1 \right) \quad (48)$$

Portanto

$$\begin{aligned} p(r) - p_0 &= -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3}R^2 \left[ -\frac{1}{4} \left( e^{-2\frac{r^2}{R^2}} - 1 \right) + \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{2} \right) e^{-2\frac{r^2}{R^2}} - \frac{1}{2} \right] \right] \\ &= -G \frac{4\pi\rho_0^2}{3}R^2 \frac{1}{6} \left[ 1 + \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) e^{-\frac{2r^2}{R^2}} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Aplicando a condição de contorno (7), obtemos

$$p_0 = G \frac{4\pi\rho_0^2 R^2}{3} \frac{1}{6} \quad (50)$$

Portanto

$$p(r) = \frac{4\pi G\rho_0^2}{3}R^2 \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) e^{-2\frac{r^2}{R^2}} \quad (51)$$

### 3. Contração Gravitacional de um Corpo Esférico

Efetuamos algumas estimações de contração gravitacional de um corpo em termos da mecânica Newtoniana. Supondo que o corpo é esférico de massa  $M$  e de raio  $R$ . Usaremos um modelo de poeira do corpo, tal que as partículas do corpo não produzem pressão. Sob ação de força gravitacional o corpo sofre contração do raio inicial  $R$  até o raio gravitacional  $r_g$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (52)$$

Supomos que a massa do corpo é acima do limite Tolman-Oppenheimer-Volkoff, que por estimações modernas tem valor em intervalo de 1.5 a 3.0 massas solares. Escolhemos  $M = kM_{\odot}$  com  $k = 3$ , onde  $M_{\odot}$  é a massa solar. Na superfície do corpo uma partícula de prova sofre atração gravitacional pela massa total incluída na esfera. A força que atua na partícula de prova de massa  $m$  é

$$F_g = G \frac{Mm}{R^2} \quad (53)$$

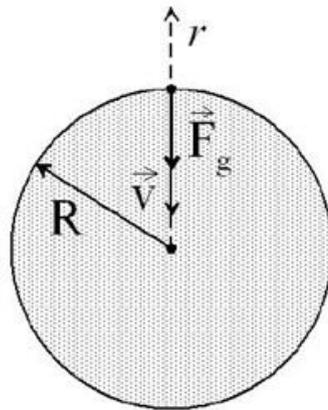


Figura 6: Esquema para dedução da equação de contração gravitacional.

onde  $G$  é a constante gravitacional. Escrevemos a equação de Newton para a partícula de prova na superfície do corpo

$$m \frac{dv}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (54)$$

onde  $r$  é o raio atual da esfera, o sinal " - " é porque o sentido da força gravitacional é oposto ao sentido positivo da coordenada radial  $r$  (ver Fig. 6). Supomos também que o processo de contração começa do estado de repouso, tal que em um instante temos

$$v(0) = 0 \quad (55)$$

ou para velocidade da partícula na superfície

$$v(R) = 0 \quad (56)$$

Apresentando

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr} \quad (57)$$

chegamos a equação diferencial para  $v^2$

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr} = -G \frac{M}{r^2}$$

ou

$$\frac{dv^2}{dr} = -\frac{2GM}{r^2} \quad (58)$$

com a condição de contorno (56). Resolvendo a equação diferencial (58)

$$\begin{aligned} v^2(r) - v^2(R) &= -2GM \int_R^r \frac{1}{r^2} dr = 2GM \left[ \frac{1}{r} \right]_R^r = 2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = 2GM \frac{R-r}{rR} \\ &= \frac{2GM}{R} \frac{1 - \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}} = \frac{2GM}{R} \left( \frac{R}{r} - 1 \right) \end{aligned} \quad (59)$$

obtemos

$$v(r) = -\sqrt{\frac{2GM}{R}} \sqrt{\frac{1 - \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}} \quad (60)$$

Na solução (60) é escolhido o sinal " - " porque o sentido do vetor de velocidade é oposto ao sentido positivo da coordenada radial  $r$  (ver Fig. 6). Para posição local da partícula de prova na superfície do corpo temos a equação diferencial

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2GM}{R}} \sqrt{\frac{1 - \frac{r}{R}}{\frac{r}{R}}} \quad (61)$$

com a condição inicial

$$r(0) = R \quad (62)$$

Escrevendo a Eq. (61) como

$$\sqrt{\frac{R}{2GM}} \sqrt{\frac{\frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}}} dr = -dt \quad (63)$$

temos

$$t = -\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \int_R^r \sqrt{\frac{\frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}}} d\left(\frac{r}{R}\right) \quad (64)$$

ou

$$t = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \int_r^R \frac{\frac{r}{R}}{\sqrt{1 - \frac{r}{R}}} d\left(\frac{r}{R}\right) \quad (65)$$

Introduzindo uma variável

$$x = \frac{r}{R} \quad (66)$$

reescrevemos a Eq. (65) na forma

$$t = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \int_{\frac{r_g}{R}}^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx \quad (67)$$

Efetuamos uma estimativa do tempo  $t_g$  de contração do corpo do raio inicial  $R$  até o raio gravitacional  $r_g$  que é dado pela expressão

$$t_g = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \int_{\frac{r_g}{R}}^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R^3}{r_g}} \int_{\frac{r_g}{R}}^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx \quad (68)$$

Supondo que o processo de contração começa para um corpo com densidade típica estelar, obtemos estimativa para o limite inferior da integral na Eq. (68)

$$\frac{r_g}{R_S} \approx 8.85 \cdot 10^{-6} \quad (69)$$

Para um corpo com densidade típica de estrela de nêutrons temos a estimativa

$$\frac{r_g}{R_N} \approx 5.14 \cdot 10^{-2} \quad (70)$$

Vemos que

$$\frac{r_g}{R} \ll 1 \quad (71)$$

portanto aceitamos uma aproximação mais grosseira

$$\frac{r_g}{R} \approx 0 \quad (72)$$

Aproximação mais exata apresentaremos mais a frente. Na aproximação (72) temos a integral

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx \quad (73)$$

A integral (73) pode ser calculada usando as funções Beta e Gama

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} (\sqrt{\pi})^2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (74)$$

Ou por mudança de variável

$$\begin{aligned} x &= \sin^2 t, 1-x = \cos^2 t, dx = 2 \sin t \cos t dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t} 2 \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (75)$$

Então, obtemos a seguinte estimativa para  $t_g$

$$t_g = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R^3 \pi}{r_g^2}} \quad (76)$$

Para um corpo de tamanho estelar temos

$$t_{gS} \approx 29 \text{ min} \quad (77)$$

Para um corpo de tamanho de uma estrela de nêutrons

$$t_{gN} \approx 3.97 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (78)$$

Apresentaremos uma estimativa mais exata para a integral na Eq. (68) usando a aproximação (71)

$$\int_{\frac{r_g}{R}}^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx - \int_0^{\frac{r_g}{R}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx \quad (79)$$

Na segunda integral na Eq. (79) temos para a função

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{16} x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{128} x^{\frac{9}{2}} + O\left(x^{\frac{11}{2}}\right) \quad (80)$$

portanto

$$\int_0^{\frac{r_g}{R}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \frac{2}{3} \left(\frac{r_g}{R}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} \left(\frac{r_g}{R}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{28} \left(\frac{r_g}{R}\right)^{\frac{7}{2}} + O\left(\left(\frac{r_g}{R}\right)^{\frac{9}{2}}\right) \quad (81)$$

Então para integral (79) obtemos a estimação

$$\int_{\frac{r_g}{R}}^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{r_g}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5} \left(\frac{r_g}{R}\right) + \frac{3}{28} \left(\frac{r_g}{R}\right)^2 + O\left(\left(\frac{r_g}{R}\right)^3\right)\right) \quad (82)$$

Para o tempo de contração podemos escrever

$$t_g = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R^3}{r_g}} \left[ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{r_g}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5} \left(\frac{r_g}{R}\right) + \frac{3}{28} \left(\frac{r_g}{R}\right)^2 + O\left(\left(\frac{r_g}{R}\right)^3\right)\right) \right] \quad (83)$$

A estimativa (83) de fato é bem grosseira, porque o campo gravitacional de um corpo de raio bem próximo ao seu raio gravitacional é muito forte e ao invés da mecânica Newtoniana deve ser aplicada a teoria da Relatividade Geral.

#### 4 Conclusão

Neste trabalho foram discutidos modelos estelares analíticos simplificados que incluem duas equações básicas: a equação de equilíbrio hidrostático e a equação de conservação de massa. Usando distribuição de densidade da massa na estrela como uma determinada função obtemos analiticamente a correspondente distribuição de pressão dentro da esfera e determinamos a pressão central. Discutimos as distribuições de densidade da forma constante, potencial, exponencial e gaussiana. As distribuições propostas no trabalho são até um determinado grau convencionais. Entretanto elas são mais realísticas (exceto o exemplo de densidade constante) comparando, por exemplo, com o modelo estelar linear. Para modelagem de estrelas com um núcleo extenso é mais apropriada a distribuição da forma potencial; Variação do grau da função potencial possibilita modelar a extensão do núcleo estelar. Para modelagem de alguns tipos de estrelas é mais apropriado utilizar um modelo com densidade na superfície não nula. As distribuições exponencial e gaussiana realizam esse mesmo cenário. Em alguns casos pode ser conveniente fazer estimativas, utilizando a condição de contorno no infinito. Os modelos com as distribuições exponencial e gaussiana podem ser facilmente reformulados para a condição de contorno no infinito:  $p(r) = 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ . No caso da distribuição exponencial a correspondente solução toma à forma:

$$p(r) = \frac{-4 \pi G \rho_0^2 R^2}{3} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{2r}{R} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) e^{-\frac{2r}{R}}$$

$$p_0 = \frac{4 \pi G \rho_0^2 R^2}{3} \frac{1}{6}$$

No caso da distribuição gaussiana a solução tem a mesma forma das Eqs.(50), (51)

$$p(r) = \frac{4 \pi G \rho_0^2 R^2}{3} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) e^{-\frac{2r^2}{R^2}}, p_0 = G \frac{4 \pi \rho_0^2 R^2}{3} \frac{1}{6}$$

Para dar um exemplo de uma distribuição da densidade dentro de estrelas reais apresentamos na figura (7) a distribuição de densidade dentro do Sol obtida pelo Birmingham Solar Oscillations Network (BiSON-13) da Ref. [7]. Prestamos atenção que os dados na Ref. [7] iniciam do valor de  $r/R_{\odot} = 0,058884$  ( $R_{\odot}$  é o raio do Sol). Portanto para construir o modelo de qualquer forma é necessário aplicar uma hipótese sobre o intervalo central  $0 < r < r_{in}$ . Para estrelas distantes é impossível obter a informação tanta detalhada. Usando os dados observacionais diretos e indiretos, fazem conclusões sobre as características mais gerais: luminosidade, massa, raio, características espectrais, etc.. Então, modelagem física matemática torna-se o único método de investigação da estrutura interna das estrelas. As funções propostas neste trabalho a título de distribuições da densidade podem ser consideradas como funções de teste. Introdução de um parâmetro (ou vários parâmetros) na função possibilita ajustar a função a um aspecto mais apropriado pela variação do parâmetro. Se ainda satisfizer a propriedade de obtenção de soluções das equações do modelo na forma analítica podemos chegar a um modelo (de fato a um classe de modelos) analítico exatamente solúvel com possibilidade de escolha e ajuste da função de distribuição da densidade. Tanta discussão de modelos analíticos exatamente solúveis vemos como uma das possíveis continuações deste trabalho.

Na segunda parte do trabalho apresentamos estimação de tempo de contração gravitacional de um corpo esféricamente simétrico em modelo de poeira em termos da Mecânica Newtoniana. Para descrever o processo na forma mais realística foi discutida a contração do corpo até o seu raio gravitacional. O problema é desenvolvido até a estimação de uma integral imprópria com um limite variável. A estimação da integral foi realizada com uso de decomposição em série da função na integral. Processo de contração de um corpo até o raio gravitacional em termos da Mecânica Newtoniana de fato é bem grosseira. Mais certo tanto processo deve ser considerado em termos da Relatividade Geral. Entretanto em termos da Relatividade Geral o problema também pode ser levada a estimação de uma integral imprópria com um limite variável. Um modo de estimação da integral imprópria demonstrado nesse trabalho é possível usar para um cálculo em termos da Relatividade Geral. Tanta análise pretendemos realizar análise em um outro trabalho.

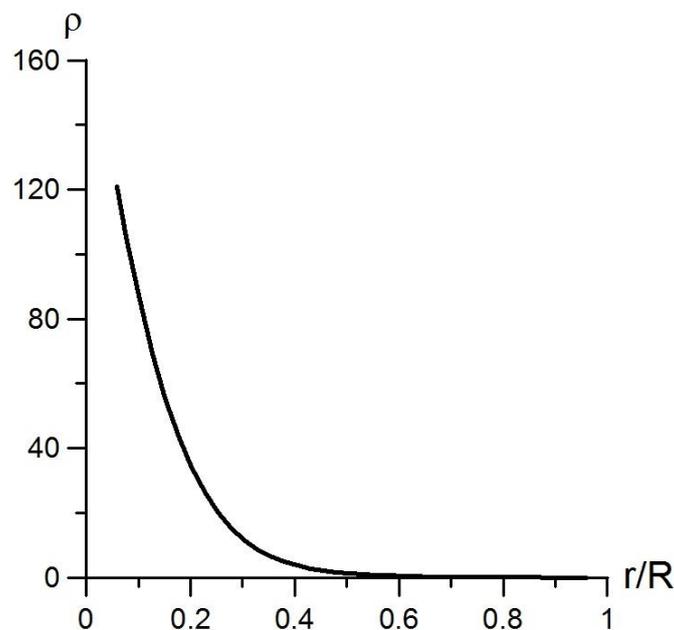


Figura 7: Distribuição da densidade de massa no Sol segundo os dados de BiSON-13 [7]; a densidade  $\rho$  é apresentada em  $g/cm^3$ .

- [1] Clayton DD. Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis. New York: McGraw-Hill; 1968.
- [2] Hansen CJ, Kawaler SD, Trimble V. Stellar Interiors. New York: Springer-Verlag; 2004.
- [3] Stein RF. Stellar Evolution: a Survey with Analytic Models, in Stellar Evolution. New York: Plenum Press; 1966. p. 3-82.
- [4] Boas ML. Mathematical Methods in the Physical Sciences. New York: John Wiley; 2005.
- [5] Landau LD, Lifshitz EM. Course of Theoretical Physics 2, The Classical Theory of Fields. Oxford: Pergamon Press; 1971.
- [6] Schutz BF. A First Course in General Relativity. Cambridge: Cambridge University Press; 2009.
- [7] Basu S, Chaplin WJ, Elsworth Y, New R, Serenelli AM. Fresh insights on the structure of the solar core. The Astrophysical Journal. 2009; 699:1403-1417.