SCIENTIA PLENA VOL. 9, NUM. 11 2013
www.scientiaplena.org.br

Equações do movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade

A. S. Silva[1]; E. de Jesus[2]; R.L. Pagano[2], L. D. M. Meneses[1]; C. P. S. Rocha[3]

[1]*Departamento de matemática, Universidade Federal de Sergipe , 491000-000, São Cristovao-SE,Brasil*

[2]*Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 491000-000, São Cristovao-SE,Brasil*

[3]*Curso de Engenharia Química, Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 491000-000, São Cristovao-SE,Brasil*

ass@infonet.com.br;

(Recebido em 22 de julho de 2013; aceito em 01 de novembro de 2013)

Este trabalho, no contexto de meio poroso saturado com fluido, considera o movimento de suspensão particulada na qual as densidades do sólido e do fluido puros são constantes, cujas equações dos balanços são estabelecidas pela teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas. Por conta das densidades constantes, que caracterizam restrição de incompressibilidade, cada tensor tensão é dado por uma parte arbitrária mais outra constitutiva, como também a força de interação, a energia de interação e a energia livre de Helmholtz. As partes arbitrárias foram determinadas com base em desigualdade entrópica, sob o princípio de que a soma das produções entrópicas das mesmas é nula para todo movimento compatível com a restrição de incompressibilidade. Como resultados, foi mostrado que tal princípio produz pressões arbitrárias diferentes para as fases sólida e fluida, e, além disso, causa grande influência nas equações dos balanços de quantidade de movimento linear, uma vez que surgem novos termos de interação. Neste sentido, o conjunto de equações obtido gera sistemas com formas diferentes para o movimento de suspensões particuladas, sendo cada sistema estabelecido pelo modo como são agrupados e interpretados os termos de pressões arbitrárias e interações arbitrárias.

Palavras-chave: suspensões particuladas, restrição de incompressibilidade, equações do movimento

Equations of motion of particulate suspensions with incompressibility constraint

This work, in the context of saturated porous medium with fluid, considers the particulate suspension motion in which the densities of the pure solid and fluid are constants, whose equations of balance are established by the solid-fluid mixtures continuous theory without chemical reactions. Because of the constant densities that characterize the incompressibility constraint, each strain tensor is given by one arbitrary part over another constitutive, as well as the interaction force, interaction energy and the Helmholtz free energy. The arbitrary parts were determined based on entropic inequality, under the principle that the sum of the entropic outputs is zero for all motion compatible with the incompressibility constraint. As a result, it was shown that this principle produces different arbitrary pressures for solid and fluid phases and, moreover, it causes a great influence on the balance equations of linear momentum, since there are new interaction terms. Accordingly, the set of equations obtained generates systems with different ways for the motion of particulate suspensions, each system established on how the terms of arbitrary pressures and arbitrary interactions are grouped and interpreted.

Keywords: particulate suspensions, incompressibility constraint, equations of motion.

1. INTRODUÇÃO

Formas de equações para o movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade, oriundas dos balanços de quantidade de movimento linear, são objetos de discussão em sistemas particulados, uma vez que existem na literatura várias teorias estabelecidas para o movimento de tais suspensões, como mostra a análise ampla e detalhada do trabalho de Bedford and Drumheller [1].

O trabalho desenvolvido por [2], também trata desta questão através do estabelecimento de uma teoria puramente mecânica para uma SPRI: suspensão particulada saturada com fluido, modelada pela teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas, na qual as densidades do sólido e do fluido puros são constantes, que caracterizam restrição de incompressibilidade. Cada tensor tensão envolvido nesta teoria é decomposto em uma parte constitutiva e outra arbitrária não determinada pela história do movimento, como também a força de interação. As partes arbitrárias são determinadas com base em desigualdade entrópica, sob o princípio de que a soma das produções entrópicas das mesmas é nula para todo movimento compatível com a restrição de incompressibilidade.

Por ser baseada em desigualdade entrópica, a teoria proposta por [2] é bem fundamentada no sentido de que a mesma é suportada no princípio básico de validade da desigualdade para todos os processos termodinâmicos admissíveis. Ela produz resultados compatíveis com os de várias teorias da literatura. Mesmo assim, ainda é uma teoria simplificada, uma vez que o axioma usado é baseado apenas na parte mecânica da desigualdade entrópica produzindo, como consequência, a mesma pressão arbitrária para as fases sólida e fluida. Desse modo, o axioma puramente mecânico não é adequado quando o meio poroso apresenta uma diferença de pressão entre fases significativa. Por isso, neste trabalho, adicionando ao axioma puramente mecânico a produção entrópica da parte arbitrária de cada energia livre de Helmholtz, estabelecemos uma teoria quase mecânica para a SPRI, assim chamada por não envolver produções entrópicas com derivadas e/ou gradientes de temperatura. Daí, mostramos que o novo axioma produz pressões arbitrárias diferentes para as fases sólida e fluida e, além disso, causa grande influência nos balanços de quantidade de movimento linear, uma vez que surgem novos termos de interação.

2. BALANÇOS BÁSICOS

No contexto da teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas [3], escrevemos a seguir os balanços de massa e de quantidade de movimento linear.

Balanços de massa:

$$\dot{\rho}_\alpha + \rho_\alpha div V_\alpha = 0 \qquad \dot{\rho}_\alpha \equiv \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + (grad \rho_\alpha) \cdot V_\alpha \qquad \alpha = 1, 2 \tag{1}$$

onde: o sub-índice α indica o constituinte α, ρ_α é a densidade, $\alpha = 1$ indica o constituinte fluido, div é o operador divergente espacial, V_α é a velocidade, t é a variável tempo e $grad$ é o operador gradiente espacial.

Balanços de quantidade de movimento linear:

$$\rho_\alpha a_\alpha = div T_\alpha + l_\alpha + \rho_\alpha g_\alpha \qquad a_\alpha \equiv \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (grad V_\alpha) V_\alpha \tag{2}$$

onde a_α é a aceleração, T_α é o tensor tensão, l_α é a força de interação e g_α é a força de campo.

Além da força de interação l_α, outro tipo de interação importante para a formulação da teoria quase mecânica para a SPRI é a energia de interação E_α. Desse modo, além das Equações 1 e 2 para a mistura como um todo, também escrevemos:

$$l_1 + l_2 = 0 \qquad E_1 + E_2 = 0 \tag{3}$$

3. SUSPENSÃO PARTICULADA COM RESTRIÇÃO DE INCOMPRESSIBILIDADE

Numa suspensão particulada saturada com um fluido e modelada pela teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas, as densidades dos constituintes e as densidades ρ_f e ρ_s, respectivamente, do sólido e do fluido puros são relatadas por:

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_f \qquad \rho_2 = (1 - \varepsilon) \rho_s \tag{4}$$

onde ε é a função porosidade. Como para a SPRI ρ_s e ρ_f são constantes, das Equações 1 e 4, podemos escrever:

$$\varepsilon\mathbf{1}\cdot L_1 + V_1\cdot grad\varepsilon + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0 \qquad L_1 \equiv gradV_1 \tag{5}$$

$$(1-\varepsilon)\mathbf{1}\cdot L_2 - V_2\cdot grad\varepsilon - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0 \qquad L_2 \equiv gradV_2 \tag{6}$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade [4].

As formas das Equações 5 e 6, o tensor tensão T_α, a força de interação l_α, a energia de interação E_α e a energia livre de Helmholtz A_α são elementos básicos para o estabelecimento de uma teoria quase mecânica para a SPRI, começando com as seguintes decomposições:

$$l_\alpha = l_\alpha^a + l_\alpha^c \qquad T_\alpha = T_\alpha^a + T_\alpha^c \tag{7}$$

$$E_\alpha = E_\alpha^a + E_\alpha^c \qquad A_\alpha = A_\alpha^a + A_\alpha^c \tag{8}$$

onde o índice superior a indica parte arbitrária, não determinada pela história do movimento, e o índice superior c indica parte constitutiva. Além disso, postulamos aqui que as partes arbitrárias e constitutivas, de cada força de interação e cada energia de interação, também devem satisfazer a Equação 3, ou seja:

$$l_1^a + l_2^a = 0 \qquad l_1^c + l_2^c = 0 \tag{9}$$

$$E_1^a + E_2^a = 0 \qquad E_1^c + E_2^c = 0 \tag{10}$$

Para o cálculo das partes arbitrárias, escrevemos para cada constituinte o seguinte axioma: a soma das produções entrópicas das partes arbitrárias das Equações 7 e 8 é nula para todo movimento compatível com a restrição de incompressibilidade:

$$\rho_\alpha\frac{\partial A_\alpha^a}{\partial t} + (l_\alpha^a + \rho_\alpha gradA_\alpha^a)\cdot V_\alpha - T_\alpha^a\cdot L_\alpha - E_\alpha^a = 0 \tag{11}$$

Então, para que a Equação 5 do constituinte fluido não seja destruída pelo axioma expresso na Equação 11 para $\alpha = 1$, devemos ter:

$$l_1^a = p_1 grad\varepsilon - \rho_1 gradA_1^a \qquad T_1^a = -\varepsilon p_1\mathbf{1} \tag{12}$$

$$E_1^a = \rho_1\frac{\partial A_1^a}{\partial t} - p_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \tag{13}$$

onde p_1 é uma função escalar arbitrária. Do mesmo modo, para que a Equação 6 do constituinte sólido não seja destruída pelo axioma expresso na Equação 11 para $\alpha = 2$, também devemos ter:

$$l_2^a = -p_2 grad\varepsilon - \rho_2 gradA_2^a \qquad T_2^a = -(1-\varepsilon)p_2\mathbf{1} \tag{14}$$

$$E_2^a = \rho_2\frac{\partial A_2^a}{\partial t} - p_2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \tag{15}$$

onde p_2 é outra função escalar arbitrária. Consequentemente, das Equações 9, 10, 12 – 15, obtemos que:

$$\rho_1 gradA_1^a + \rho_2 gradA_2^a = (p_1 - p_2)grad\varepsilon \tag{16}$$

$$\rho_1 \frac{\partial A_1^a}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial A_2^a}{\partial t} = (p_1 - p_2)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{17}$$

Com a introdução das funções arbitrárias definidas por

$$P_e = \rho_1 A_1^a + \rho_2 A_2^a \qquad P_f = p_1 + \rho_f A_1^a \qquad P_s = p_2 + \rho_s A_2^a \tag{18}$$

o par de Equações 16 e 17 fica transformado em

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} + \left(P_s - P_f\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

$$gradP_e + \left(P_s - P_f\right)grad\varepsilon = 0 \tag{20}$$

cuja eliminação de P_e fornece a equação

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\left(grad\left(P_s - P_f\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(P_s - P_f\right)\right)grad\varepsilon \tag{21}$$

Além dos resultados expressos pelas Equações 19, 20 e 21, outros podem ser destacados com a introdução de mais duas funções arbitrárias definidas por:

$$P = \varepsilon p_1 + (1-\varepsilon)p_2 \qquad \Pi = P - P_f \tag{22}$$

Desse modo, das Equações 16, 17 e 22 um destaque é expresso por

$$(1-\varepsilon)grad\left(P_s - P_f\right) = grad\Pi \tag{23}$$

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\left(P_s - P_f\right) = \frac{\partial \Pi}{\partial t} \tag{24}$$

que por meio da Equação 21 produz a relação

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}grad\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial t}grad\varepsilon \tag{25}$$

Outro destaque é obtido com o uso das Equações 12 – 15, 16 – 18 e 22 para as partes arbitrárias de cada força de interação, expresso por

$$l_1^a = -\varepsilon gradP + grad(\varepsilon p_1) + \varepsilon grad\Pi \tag{26}$$

$$l_2^a = \varepsilon gradP - grad(\varepsilon p_1) - \varepsilon grad\Pi \tag{27}$$

o qual mostra que a grandeza l_a definida por

$$l_a = \ \varepsilon grad\Pi \tag{28}$$

é uma força de interação arbitrária que é parte de l_1^a. Além disso, é importante destacar também o resultado

$$\varepsilon grad\Pi + (1-\varepsilon)grad(P - P_s) = 0 \tag{29}$$

que tem característica de balanço de forças de interação.

Com o desenvolvimento de relações entre grandezas arbitrárias, podemos partir agora para as equações do movimento da SPRI com base nos balanços de massa e de quantidade de movimento linear, as quais começam com

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + div\ (\varepsilon V_1) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - div\big((1-\varepsilon)V_2\big) = 0 \quad (31)$$

obtidas das Equações 1 e 4. Em seguida com

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon grad P_f + div\sigma_1 + m + \rho_1 g_1 \quad (32)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1-\varepsilon) grad P_s + div\sigma_2 - m + \rho_2 g_2 \quad (33)$$

obtidas das Equações 7, 12, 14, 16 e 18, onde

$$m = l_1^c \qquad \sigma_1 = T_1^c \qquad \sigma_2 = T_2^c \quad (34)$$

são as partes constitutivas da força de interação l_1 e de cada tensor tensão, respectivamente, e as acelerações a_1e a_2 são dadas por:

$$a_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + (grad V_1)V_1 \quad (35)$$

$$a_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + (grad V_2)V_2 \quad (36)$$

Por causa das grandezas arbitrárias e de relações entre elas, o movimento da SPRI fica estabelecido por uma das formas de sistemas de equações, destacados a seguir.

Sistema I

É o sistema formado pelas Equações 19, 20, 30 – 36 para as funções incógnitas ε, V_1, V_2, P_f, P_s e P_e, uma vez que σ_1, σ_2 e m são grandezas constitutivas.

Sistema II

As relações definidas pelas Equações 4, 32 e 33 fornecem a equação de interseção

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -grad\big(P_s - P_f\big) + \frac{1}{1-\varepsilon} div\sigma_2 - \frac{1}{\varepsilon} div\sigma_1 - \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (37)$$

É o sistema formado pelas Equações 21, 30, 31, 35, 36 e 37 para as funções incógnitas ε, V_1, V_2 e $P_s - P_f$.

Sistema III

As relações definidas pelas Equações 23, 28, 29, 32 e 33 produzem as equações

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon grad P + l_a + div\sigma_1 + m + \rho_1 g_1 \quad (38)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1-\varepsilon) grad P - l_a + div\sigma_2 - m + \rho_2 g_2 \quad (39)$$

É o sistema formado pelas Equações 25, 28, 30, 31, 35, 36, 38 e 39 para as funções incógnitas ε, V_1, V_2, P e Π.

Sistema IV

As relações definidas pelas Equações 23, 28 e 33 fornecem a equação

$$\rho_2 a_2 = -(1-\varepsilon) gradP_f + div\sigma_2 - m - \frac{l_a}{\varepsilon} + \rho_2 g_2 \tag{40}$$

É o sistema formado pelas Equações 25, 28, 30, 31, 32, 35, 36 e 40 para as funções incógnitas ε, V_1, V_2, P_f e Π.

Sistema V

As relações definidas pelas Equações 4, 28, 32 e 40 fornecem a equação de interseção

$$\varepsilon\rho_2(a_2 - g_2) - (1-\varepsilon)\rho_1(a_1 - g_1) = \varepsilon div\sigma_2 - (1-\varepsilon) div\sigma_1 - \varepsilon m - l_a \tag{41}$$

É o sistema formado pelas Equações 25, 28, 30, 31, 35, 36 e 41 para as funções incógnitas ε, V_1, V_2, e Π.

4. DISCUSSÃO

Como m é a parte constitutiva da força de interação l_1, das Equações 7 e 34

$$m = l_1 - l_1^a. \tag{42}$$

A grandeza m é a força difusiva ou resistiva [2,5] definida por

$$m = l_1 - l_1^0 \qquad l_1^0 = l_1 \text{ para } V_1 = V_2. \tag{43}$$

Logo, das Equações 42 e 43

$$l_1^a = l_1^0 \tag{44}$$

ou seja, a parte arbitrária l_1^a é a força de interação l_1 no equilíbrio. Desse modo, das Equações 12, 18 e 44

$$l_1^0 = P_f grad\varepsilon - grad(\rho_1 A_1^a) \tag{45}$$

Para discussão da Equação 45 e da função arbitrária P_f, com base na Equação 43 e no Sistema I, consideremos a SPRI sob a ação da gravidade na situação estática constante caracterizada por:

$$\varepsilon = constante \qquad V_1 = V_2 = 0 \qquad m = 0 \qquad div\sigma_1 = 0 \tag{46}$$

Neste caso, como

$$g_1 = g_2 = g \tag{47}$$

onde g é a aceleração da gravidade, das Equações 4, 32, 33, 45-47

$$gradP_f = \rho_f g \tag{48}$$

$$l_1^0 = -grad(\rho_1 A_1^a) = grad(\rho_2 A_2^a) \tag{49}$$

$$gradP_s = \frac{1}{1-\varepsilon} div\sigma_2 + \rho_s g \tag{50}$$

A Equação 48 mostra que, para a situação estática constante sob ação da gravidade, P_f é a pressão do fluido, concordando com os dados bem conhecidos dos experimentalistas. O resultado dado pela Equação 49 mostra que, na mesma situação, a força de interação não precisa ser nula. Este resultado está coerente com aqueles dos pesquisadores que afirmam o seguinte: em tal situação a força de interação não é nula e é ela que equilibra o empuxo, aqui implícito em cada gradiente de l_1^0 da Equação 49.

Sobre a Equação 50, a análise depende de como se estabelece a situação estática constante. Se ela só acontece quando o sólido é rígido, σ_2 é indeterminada e tal equação pode não produzir informações sobre P_s e, neste caso, P_s é simplesmente uma função escalar arbitrária vista como equilibradora do Sistema I. Por outro lado, se o sólido não é rígido ou σ_2 não é considerado na Equação 50, temos que $div\sigma_2 = 0$ e, como no caso do fluido, P_s pode ser interpretada como uma pressão arbitrária associada ao sólido.

Discussão sem a consideração de solução constante pode ser feita utilizando o Sistema II para a SPRI sob a ação da gravidade. Primeiro, das Equações 4 e 47, vale a observação de que o termo

$$\rho_s g_2 - \rho_f g_1 = (\rho_s - \rho_f) g$$

aparece naturalmente em tal sistema sem precisar outro tipo de decomposição para a força de interação l_1, como discutem alguns pesquisadores em sistemas particulados. Segundo, considerando as velocidades dos constituintes e as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão funções da porosidade, em uma dimensão, a situação caracterizada por

$$\varepsilon V_1 + (1-\varepsilon)V_2 = 0 \qquad V_2 = w_0 - (u_0 + w_0)\cdot\frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \qquad \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi)d\xi = w_0 t - y \tag{51}$$

$$\left[\frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} - (\rho_s g_2 - \rho_f g_1)\right] A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \rho_s\left[\frac{(w_0 - V_2)^2}{1-\varepsilon}\right] - \rho_f\left[\frac{(w_0 - V_1)^2}{\varepsilon}\right] \tag{52}$$

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon}$$

mostra que

$$gradP_s = gradP_f \tag{53}$$

onde ε_o é uma porosidade constante, u_o e w_o são velocidades constantes e y é a coordenada espacial, sendo importante ressaltar que as soluções do Sistema II, estabelecidas pelas Equações 51-53, podem ser encaixadas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta [6]. Então, da Equação 53, podemos escolher apenas uma pressão arbitrária para aparecer no Sistema I, mesmo sendo diferentes as pressões das fases sólida e fluida. Ou seja, o aparecimento de uma única pressão arbitrária nas Equações 32 e 33 não significa que as pressões das fases sejam iguais. Neste sentido, o trabalho realizado em [2] não precisaria se restringir a um axioma puramente mecânico para a obtenção de um sistema com apenas uma pressão arbitrária. Portanto, da Equação 53, os sistemas de [2] e de outros da literatura ficam iguais aos Sistemas I e II, ressalvando-se que as pressões das fases não precisam ser iguais.

Outras teorias para a SPRI, como mostra o trabalho desenvolvido em [7], também estabelecem a pressão arbitrária da fase fluida diferente da pressão arbitrária da fase sólida. Mas, além de serem casos particulares da teoria desenvolvida neste trabalho, cada sistema de equações diferenciais parciais produzido apresenta o número de funções incógnitas excedendo de uma unidade o número de equações. Por isso, tais teorias estabelecem equações extras para a diferença de pressão entre as fases, inclusive equações constitutivas, para a obtenção de um sistema fechado, como é o caso do Sistema I ou II que, pelo menos em uma dimensão, apresenta o número de funções incógnitas igual ao número de equações.

A soma das Equações 38 e 39 do Sistema III sugere que a grandeza arbitrária P pode ser interpretada como a pressão no meio poroso (suspensão particulada). Além disso, com base nas Equações 22, 28 e 29, a função arbitrária Π pode ser interpretada como sendo uma pressão arbitrária de interação, uma vez que na situação estática constante sob a ação da gravidade $P - \Pi = P_f$ é a pressão do fluido no poro.

Sobre as grandezas constitutivas nos Sistemas I até V, m, como já frisado, é a força difusiva ou resistiva bastante estudada na literatura como função da diferença de velocidades. Em muitos problemas σ_1 é desprezada e σ_2 é a chamada pressão constitutiva do sólido considerada como função da porosidade. São também estudados os casos em que σ_1 é dada por uma relação semelhante à do fluido newtoniano.

Para discussão com base na parte da força de interação arbitrária l_1^a dada pela Equação 28, as relações definidas pelas Equações 32 e 40 dos Sistemas I e IV, respectivamente, mostram que as equações do movimento da SPRI podem ser escritas envolvendo apenas a pressão arbitrária do fluido no poro P_f, uma vez que a outra grandeza arbitrária l_a que aparece na Equação 40 é uma força de interação. Além disso, P_f e l_a são fatores de estabilidade, eles equilibram as Equações 32 e 40 ou 41 em qualquer situação. Isso permite, por exemplo, trabalhar apenas com a Equação 32 sem ser necessário desconsiderar a Equação 40, pois, estabelecida a função P_f a Equação 40 fica equilibrada por l_a, situação bastante conhecida em filtração uniforme. Também pode-se observar aqui que P_f e l_a podem absorver certas grandezas consideradas desprezíveis em muitos modelos propostos, ou seja, uma tal grandeza, mesmo não sendo desprezível, poderia não aparecer no modelo, já estaria englobada em P_f ou l_a. Há também os casos em que as equações propostas não apresentam grandezas arbitrárias. Nestes casos tudo é sustentado por supostas equações constitutivas para σ_1, σ_2 e m, os quais são sobrecarregados para que as Equações 32 e 40 ou 41 sejam equilibradas. Neste sentido, as equações propostas para σ_1, σ_2 e m podem apresentar dados que, para um mesmo par sólido-fluido, variam de um modelo para outro. Estes dados deveriam estar inclusos em grandezas arbitrárias que variam livremente até no mesmo modelo.

Sobre a interação arbitrária l_a, pode-se obter informação a partir da equação de interseção, Equação 41, do Sistema V considerando-se os casos em que $div\sigma_1 = 0$, $div\sigma_2 = 0$ e $m = 0$. Nestes casos, as Equações 4 e 41 mostram que l_a é função da porosidade e das acelerações reduzidas $a_2 - g_2$ e $a_1 - g_1$. Baseado nisso, pode-se propor para l_a, em qualquer situação, a relação

$$l_a = d_1(a_1 - g_1) + d_2(a_2 - g_2),$$

onde d_1 e d_2 são funções densidades arbitrárias, já discutidas em [8] para toda parte arbitrária da força de interação. Aqui l_a é apenas uma parte da força de interação arbitrária.

5. CONCLUSÃO

A restrição de incompressibilidade provoca o aparecimento de grandezas arbitrárias nos balanços de quantidade de movimento linear. Por conta de tais grandezas e de relações entre elas, as equações do movimento da SPRI podem ser expressas de vários modos, destacados em sistemas com formas diferentes, uma forma de sistema para cada modo. A questão está nos agrupamentos de termos de pressões e interações arbitrárias e suas interpretações, pois os sistemas aqui estabelecidos englobam diversos esquemas propostos na literatura [9-15].

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal de Sergipe pelo apoio logístico.

---

1 Bedford A, Drumheller D S. Theories of Immiscible and Structured Mixtures. Int. J. Engng. Sci. 1983; 21(8):863-960.
2 Silva AS. Sobre Meio Poroso com Restrição de Incompressibilidade. In: XVIII ENEMP; 1990; Nova Friburgo, Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro; 1990. 593 p.
3 Atkin R J, Craine R E. Continuum theories of Mixtures: Basic theory and historical development. Q. Il. Mech. Appl. Math. 1976; 29:209-44.
4 Silva AS. Superfícies singulares e ondas de aceleração em misturas [dissertação]. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ; 1979. 90p. PTS 03.
5 Liu I S. On fluid pressure and buoyance force in porous media. Revista Brasileira de Tecnologia. 1980; 11(4): 35-43.
6 Silva AS, Jesus, E, Pagano RL, Pacífico JA. Estimação de parâmetros de suspensões particuladas com base em modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta. II Congresso Brasileiro de Reologia; 2013; Aracaju-SE; Rio de Janeiro: ABR; 2013. 143 p.
7 Givler RC. An Interpretation for the Solid-Phase Pressure in Slow Fluid-Particle Flows. Int. J. Multiphase Flow. 1987; 13(5):717-22.
8 Silva Telles A. Considerações sobre as equações do movimento em sistemas Polifásicos. Anais do XXI ENEMP; 1993; Ouro Preto, Minas Gerais: Universidade Federal de Minas Gerais; 1993. 17p.
9 Green A E, Naghdi P M, Trapp J A. Thermodynamics of a continuum with Internal Constraints. Int. J. Engng. Sci. 1970; 8:891-908.
10 Demiray H. A continuum theory of chemical Reacting Mixtures of fluids and solids. Int. J. Engng. Sci. 1981; 19:253-68.
11 Ahmadi GA. Generalized Continuum Theory for Multiphase Suspensions Flows. Int. J. Engng. Sci. 1985, 23:1-25.
12 Atkin, RJ,Craine RE. Continuum Theories of Mixtures: Applications. J. Inst. Maths. Applics. 1976; 17:153-207.
13 Prévost JH. Mechanics of Continuous Porous Media. Int. J. Engng. Sci. 1980, 18:787-800.
14 Ishii M. Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow. Eyrolles: Éditeur Paris; 1975.
15 Srinivasan S, Bonito A, Rajagopal K R. Flow of a fluid through a porous solid due high pressure gradients. Journal of porous Media. 2013;16(3):193-203.