



# Uma base preliminar de informações para o estudo do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade

Preliminary background information for the study of the motion of a particulate suspension with incompressibility constraint

D. O. Libório<sup>1\*</sup>; E. J. Santos<sup>2</sup>; P. L. Santana<sup>2</sup>; C. F. Silva<sup>2</sup>; A. S. Silva<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-Sergipe, Brasil

<sup>2</sup>Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-Sergipe, Brasil

<sup>3</sup>Departamento de Matemática e Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-Sergipe, Brasil

\*denisson.liborio@gmail.com

(Recebido em 16 de agosto de 2015; aceito em 16 de setembro de 2015)

Neste trabalho, no contexto de meio poroso com restrição de incompressibilidade, é preparada uma base preliminar de informações para o estudo de grandezas arbitrárias e constitutivas de uma suspensão particulada. São determinadas duas soluções exatas de um sistema de equações do movimento da suspensão particulada. As duas soluções são inseridas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, a qual envolve sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, inclusive pela onda de aceleração. Uma solução é inserida na região de sedimentação livre e a outra na região de transição. Os movimentos da onda e das interfaces são estabelecidos pela compatibilização da solução exata da região de sedimentação livre com a solução exata da região de transição, os quais dependem dos parâmetros velocidade da onda de aceleração, ponto de encontro da onda com a interface superior descendente e ponto de encontro das interfaces. Das soluções exatas e dos movimentos são estabelecidas duas funções velocidades que servem como base para o cálculo de tais parâmetros, juntamente com o uso de dados experimentais da literatura de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta. Com isso, é estabelecida uma base preliminar de informações para o estudo do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. São mostrados resultados sobre o cálculo numérico da velocidade da onda de aceleração, do ponto de encontro da onda com a interface superior descendente e do ponto de encontro das interfaces.

Palavras-chave: suspensão particulada, soluções exatas, modelagem matemática

This work dealt with porous media with incompressible constraints and is a study on the preparation of a preliminary background information to arbitrary and constitutive quantities of a particulate suspension. Two exact solutions of a system of motion equations for the particulate suspension were determined. The solutions were applied in the mathematical modeling of the gravitational motion of particulate suspensions in a test tube. The modeling considered sub-regions that varied with time and were bounded by moving interfaces and acceleration wave. One solution was embedded in the free sedimentation region, and the other, in the transition region. Motions of the wave and the interfaces were established by the compatibilization of the exact solution of the free sedimentation region with that of the transition region. The motions depend on the velocity parameters of the acceleration wave, meeting point of the wave with the descending upper interface, and meeting point of the interfaces. From the exact solutions and motions, two velocity functions were established, and these functions, along with the experimental data on height versus time of the descending upper interface of the test tube as obtained from literature, served as the basis for calculating the parameters. Thus, the preliminary background information for studying the motion of a particulate suspension with an incompressibility constraint was established. The numerical calculation results of the acceleration wave velocity, meeting point of the wave with the descending upper interface, and the meeting point of the interfaces are reported in this paper.

Keywords: particulate suspension, exact solutions, mathematical modeling

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo do movimento de suspensões particuladas é relevante tanto do ponto de vista teórico, como em muitas situações de interesse prático [1-6].

É importante destacar que o movimento de queda acelerada de uma partícula num fluido é um ponto de partida para obtenção de informações que podem ser usadas na análise de parâmetros de uma suspensão particulada [7-11].

Do ponto de vista de misturas sólido-fluido, a suspensão particulada pode ser estudada com base na teoria contínua de misturas sem reações químicas, que estabelece equações dos balanços de forma mais generalizada, inclusive a desigualdade entrópica que é importante tanto para análise de grandezas constitutivas, como também para grandezas arbitrárias quando há algum tipo de restrição [12-15].

De acordo com Silva e Jesus [15], dependendo de como as grandezas constitutivas e arbitrárias são agrupadas e interpretadas, formas diferentes podem ser obtidas para sistemas de equações do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. Em certas situações de adequações, a forma do sistema escolhido é aquela que facilita a determinação de soluções exatas, as mais simples possíveis, para serem inseridas em sub-regiões de uma região sobre a qual é desenvolvida uma modelagem matemática, sendo que em cada sub-região a forma do sistema não muda. Ou seja, cada solução inserida é solução do sistema na respectiva sub-região.

Em uma dimensão, pode ser utilizada modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta ou modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta, que não é simplesmente um problema puro de sedimentação. A modelagem é mais complexa, pois envolve sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, sendo que em cada região a porosidade e as velocidades satisfazem um sistema de equações diferenciais parciais.

Além disso, é preciso estabelecer condições iniciais e de contorno, considerar as condições de salto através das interfaces em movimento para caracterizar o problema estabelecido pela modelagem. As soluções de todas as regiões, levando-se em conta as interfaces em movimento, devem ser compatibilizadas.

Neste trabalho, em uma dimensão, duas soluções exatas, de uma das formas dos sistemas do trabalho de Silva e Jesus [15], são determinadas e em seguida inseridas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, uma na região de sedimentação livre e outra na região de transição.

Os movimentos da onda de aceleração, da interface superior descendente e da interface inferior ascendente são estabelecidos pela compatibilização da solução exata da região de sedimentação livre com a solução exata da região de transição, os quais dependem dos parâmetros velocidade da onda de aceleração, ponto de encontro da onda com a interface superior descendente e ponto de encontro das interfaces. Por isso, dos movimentos são estabelecidas duas funções velocidades que servem como base para o cálculo de tais parâmetros, juntamente com o uso de dados experimentais da literatura de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta.

Desse modo, dados experimentais, que podem ser coletados da literatura, de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta, as soluções exatas, as equações dos movimentos da onda de aceleração e das interfaces estabelecem uma base preliminar de informações para o estudo do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade.

São mostrados resultados sobre o cálculo numérico da velocidade da onda de aceleração, do ponto de encontro da onda com a interface superior descendente e do ponto de encontro das interfaces, pois são parâmetros fundamentais da base. Ou seja, os parâmetros básicos são usados como ponto de partida para que a base possa ser utilizada na determinação de outros parâmetros importantes de sistemas particulados. Neste sentido, podem ser destacados sedimentação, filtração, refrigeração, mecânica dos solos, hidrologia, engenharia petrolífera, engenharia ambiental, purificação da água, projetos de equipamentos industriais, cálculo de parâmetros reológicos e diversas outras áreas.

## 2. ELEMENTOS BÁSICOS

Para uma suspensão particulada, considerada como um meio poroso saturado com fluido e modelado pela teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas [15], a densidade do constituinte fluido  $\rho_1$  e a densidade do constituinte sólido  $\rho_2$  são expressas por

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_f \quad \rho_2 = (1 - \varepsilon) \rho_s \quad (01)$$

nas quais,  $\rho_f$  e  $\rho_s$  são, respectivamente, as densidades do fluido e do sólido puros e  $\varepsilon$  é a função porosidade.

Em uma dimensão, as equações do movimento de uma suspensão particulada, com restrição de incompressibilidade, são expressas pela Equação (01), com  $\rho_s$  e  $\rho_f$  constantes, e as equações relacionadas a seguir:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon V_1)}{\partial y} = 0 \quad (02)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} [(1 - \varepsilon)(V_2)] = 0 \quad (03)$$

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \frac{\partial P_f}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + m + \rho_1 g_1 \quad a_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \quad (04)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \frac{\partial P_s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - m + \rho_2 g_2 \quad a_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad (05)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial P_{sf}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial P_{sf}}{\partial t} \quad (06)$$

onde  $t$  é a variável tempo,  $y$  é a coordenada espacial,  $V_1$  é a velocidade do constituinte fluido,  $V_2$  é a velocidade do constituinte sólido,  $a_1$  é a aceleração do constituinte fluido,  $a_2$  é a aceleração do constituinte sólido,  $P_f$  e  $P_s$  são pressões arbitrárias,  $\sigma_1$  é a parte constitutiva do tensor tensão do constituinte fluido,  $\sigma_2$  é a parte constitutiva do tensor tensão do constituinte sólido,  $m$  é a parte constitutiva da força de interação,  $g_1$  é a força de campo sobre o constituinte fluido,  $g_2$  é a força de campo sobre o constituinte sólido e  $P_{sf}$  é a diferença de pressões arbitrárias definida por

$$P_{sf} = P_s - P_f \quad (07)$$

As Equações (04), (05) e (07) fornecem a equação de interseção

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -\frac{\partial P_{sf}}{\partial y} + \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (08)$$

Sob as notações

$$\varepsilon = \varepsilon(y, t) \quad V_1 = V_1(y, t) \quad V_2 = V_2(y, t) \quad (09)$$

segue das Equações (02), (03) e (09) que

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon) V_2 = \varphi = \varphi(t) \quad (10)$$

Para uma função  $\phi$  suficientemente suave com

$$\phi = \phi(y, t) = \phi(\varepsilon) \quad (11)$$

da regra da cadeia e da Equação (11) obtém-se as derivadas

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\phi}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (12)$$

Seguindo as notações expressas nas Equações (09), as Equações (07), (11) e (12) mostram de imediato que a consideração

$$P_{sf} = P_{sf}(y, t) = P_{sf}(\varepsilon) \quad (13)$$

satisfaz a Equação (06). Isso motiva, com base nas Equações (09), a determinação de soluções exatas do sistema formado pelas Equações (01)-(03), (08) e (13) e as considerações

$$V_1 = V_1(\varepsilon) \quad V_2 = V_2(\varepsilon) \quad (14)$$

de tal modo que derivadas da porosidade e das velocidades também sejam funções da porosidade. Dessa forma, suposições constitutivas generalizadas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão também podem ser colocadas na forma

$$m = m(y, t) = m(\varepsilon) \quad \sigma_1 = \sigma_1(y, t) = \sigma_1(\varepsilon) \quad \sigma_2 = \sigma_2(y, t) = \sigma_2(\varepsilon) \quad (15)$$

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1 DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES EXATAS

##### 3.1.1 Primeira Solução

É a solução constante, ou seja, a porosidade e as velocidades são constantes.

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \quad V_1, V_2 \text{ e } \varepsilon_0 \text{ constantes} \quad (16)$$

Com isso, as Equações (01)-(08), (13) e (16) determinam a condição

$$\frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \text{ para } \varepsilon = \varepsilon_0 \quad (17)$$

##### 3.1.2 Segunda Solução

É a solução determinada com base nas Equações (09)-(15), cuja construção começa com a observação de que as Equações (02) e (03) fornecem a equação diferencial

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad \gamma \equiv \frac{d}{d\varepsilon} [(1-\varepsilon)V_2] = -\frac{d}{d\varepsilon} (\varepsilon V_1) \quad (18)$$

Usando como base forma de solução da Equação (18), uma maneira de atender as considerações feitas para escrever as Equações (15) é que  $\gamma$  seja constante, ou seja, fazendo

$$\gamma = -w_0 \quad (19)$$

onde  $w_0$  é uma velocidade constante, as Equações (10), (18) e (19) e a integração da Equação (18) estabelecem as relações

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \quad V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0) + \varphi}{\varepsilon} \quad (20)$$

$$\int A(\varepsilon) d\varepsilon = y - w_0 t + cte \quad A(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 1 \quad (21)$$

em que  $u_0$  é outra velocidade constante,  $A(\varepsilon)$  é uma função arbitrária da porosidade com unidade de comprimento e, neste caso,  $\varphi$  é constante. Desse modo, das Equações (04), (05), (09), (11)-(15), (20) e (21) é obtida a equação

$$\left[ \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} - (\rho_s g_2 - \rho_f g_1) \right] A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \frac{dP_{sf}}{d\varepsilon} - Q(\varepsilon) \quad (22)$$

com  $B(\varepsilon)$  e  $Q(\varepsilon)$  dadas por

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} \quad Q(\varepsilon) = \rho_s \left[ \left( \frac{w_0 - V_2}{1-\varepsilon} \right)^2 \right] + \rho_f \left[ \left( \frac{w_0 - V_1}{\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (23)$$

### 3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

No estudo do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta (sedimentação gravitacional em proveta), em cada teste, a suspensão é colocada numa proveta de altura e diâmetro adequados, com agitação suficiente para que a condição inicial de concentração de sólidos uniforme seja obtida. As dimensões devem ser tais que os efeitos de parede não interfiram na queda das partículas sólidas, de modo que o movimento possa ser considerado unidimensional.

Desde o início do movimento de queda das partículas sólidas até o término, a região ocupada pela suspensão na proveta fica dividida em sub-regiões, as quais podem ser caracterizadas de acordo com a Figura 1.

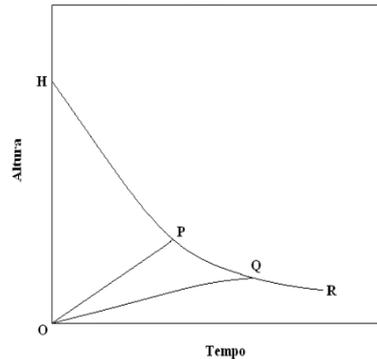


Figura 1 - Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta. (Fonte: Elaboração própria)

No gráfico da Figura 1, HPQR até a altura H corresponde à região de líquido puro, OPHO corresponde à região de sedimentação livre, OPQO corresponde à região de transição e a região limitada por OQR e o eixo dos tempos corresponde à região de compressão. As curvas HPQR, OP e OQ correspondem, respectivamente, às alturas da interface superior descendente, da onda de aceleração e da interface inferior ascendente. A introdução da região de transição OPQO foi motivada pelo trabalho de Kynch [16] e a revisão da sua teoria feita por Tiller [17] e estendida pelos trabalhos de Fitch [18] e Font [19]. A onda de aceleração, que não precisa ser visível, corresponde à propagação inicial da onda de concentração, a única que parte do fundo da proveta.

Em relação a cada curva do gráfico da Figura 1, podem ser escritas as seguintes notações:

$$x = x(t) \quad (0 \leq t < \infty); \quad h = h(t) \quad (0 \leq t \leq t_0); \quad z = z(t) \quad (0 \leq t \leq t_c) \quad (24)$$

onde  $x$  é a altura da interface superior descendente,  $h$  é a altura da onda de aceleração e  $z$  é a altura da interface inferior ascendente. O tempo  $t_0$  indica o instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração, enquanto que o tempo  $t_c$  indica o instante de encontro das duas interfaces. As alturas satisfazem as condições iniciais e as condições de encontro, respectivamente,

$$x(0) = H, \quad h(0) = z(0) = 0 \quad \text{e} \quad x(t_0) = h(t_0) \equiv x_0 \quad x(t_c) = z(t_c) \equiv x_c \quad (25)$$

nas quais  $H$  é a altura inicial da suspensão na proveta.

Com relação ao gráfico da Figura 1, a coordenada espacial  $y$  está orientada para cima de tal modo que  $y = 0$  representa o fundo da proveta ou o eixo dos tempos.

Sob a notação usada nas Equações (24), para a função porosidade em cada região, caracterizada por  $\varepsilon(y, t)$ , vale ressaltar que

$$\varepsilon(y, t) = 1 \quad x < y \leq H \quad 0 \leq t < \infty \quad (26)$$

para a região de líquido puro. Além disso, com base nas Equações (25) a função porosidade satisfaz a condição inicial

$$\varepsilon(y, 0) = \varepsilon_0 = \text{constante} \quad 0 \leq y \leq H \quad (27)$$

A onda de aceleração e as interfaces caracterizadas na Figura 1 são superfícies singulares em movimento [20]. O salto de uma função

$$\psi = \psi(y, t) \quad (28)$$

através de cada superfície singular é definido por

$$[\psi] = \psi^+ - \psi^- \quad (29)$$

em que as notações  $\psi^+$  e  $\psi^-$  indicam, respectivamente, os valores de  $\psi$  nos lados superior e inferior de cada superfície.

Os balanços de massa através de cada superfície fornecem as condições de salto [20]

$$[\rho_1(U - V_1)] = 0 \quad [\rho_2(U - V_2)] = 0 \quad (30)$$

onde  $U$  é a velocidade da superfície correspondente.

Através da onda de aceleração, definida por

$$[V_1] = [V_2] = 0 \quad [a_1] \neq 0 \quad \text{e} \quad [a_2] \neq 0 \quad (31)$$

das Equações (01), (28)-(31) resultam as condições de continuidade

$$V_1^+ = V_1^-, \quad V_2^+ = V_2^- \quad \text{e} \quad \varepsilon^+ = \varepsilon^- \quad (32)$$

Usando a Equação (26), no lado superior da interface superior descendente, pode-se escrever

$$\varepsilon^+ = 1 \quad 0 \leq t < \infty \quad (33)$$

Assim, segue das Equações (01), (28)-(30) e (33) a igualdade

$$V_2^- = U = \frac{dx}{dt} \quad 0 \leq t < \infty \quad (34)$$

As condições de velocidades nulas no fundo da proveta

$$V_1(0, t) = V_2(0, t) = 0 \quad 0 \leq t < \infty \quad (35)$$

e as Equações (10) e (35) mostram que  $\varphi = 0$  numa vizinhança do fundo da proveta. Por força das condições de salto, das Equações (01) e (28)-(30) obtém-se a relação

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon)V_2 = 0 \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (36)$$

válida para toda suspensão na proveta.

A porosidade média  $\bar{\varepsilon}$  da suspensão na proveta é definida por

$$(1 - \bar{\varepsilon})x = \int_0^x (1 - \varepsilon) dy \quad 0 \leq t < \infty \quad (37)$$

Do balanço de massa de sólidos e das Equações (24) e (25)

$$(1 - \bar{\varepsilon})x = (1 - \varepsilon_0)H \quad 0 \leq t < \infty \quad (38)$$

A porosidade média  $\varepsilon_m$  da suspensão na região de compactação, definida por

$$(1 - \varepsilon_m)z = \int_0^z (1 - \varepsilon) dy \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (39)$$

e as Equações (02) e (39), com o uso da regra de Leibnitz, determinam a derivada

$$\frac{d}{dt}((1 - \varepsilon_m)z) = (1 - \varepsilon^-) \left( \frac{dz}{dt} - V_2^- \right) \quad 0 < t < \infty \quad (40)$$

com o sinal  $-$  indicando valor no lado inferior da interface inferior ascendente.

Para cada força de campo, nesta situação,

$$g_1 = g_2 = -g \quad (41)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

### 3.3. USO DAS SOLUÇÕES EXATAS

Nesta parte, as soluções exatas serão inseridas em regiões da Figura 1 para que sejam feitas as devidas compatibilizações.

#### 3.3.1 Região de sedimentação livre

Em tal região, limitada pela proveta e por  $h(t) \leq y \leq x(t)$  e  $0 \leq t \leq t_0$ , a função porosidade é caracterizada por

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (42)$$

e as velocidades  $V_1$  e  $V_2$  também são constantes. Por isso, a primeira solução, com resultado expresso na Equação (17) é inserida nesta região. Então, com base na Equação (42),

$$\varepsilon^+ = \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad V_2 = V_2^+ \quad (43)$$

no lado superior da onda de aceleração. Logo, das Equações (42) e (43), a velocidade do constituinte sólido na região de sedimentação livre fica expressa por

$$V_2(y, t) = V_2^+ = cte \quad h(t) \leq y \leq x(t) \quad 0 < t \leq t_0 \quad (44)$$

#### 3.3.2 Região de transição

Limitada pela proveta e por  $z(t) \leq y \leq h(t)$  para  $0 \leq t \leq t_0$  e  $z(t) \leq y \leq x(t)$  para  $t_0 \leq t \leq t_c$ . Nesta região é inserida a segunda solução com resultados expressos nas Equações (18)-(23). Assim, as Equações (10), (20), (21), (25), (27) e (36) fornecem as relações

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \quad V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0)}{\varepsilon} \quad 0 < t \leq t_c \quad (45)$$

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi = w_0 t - y \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (46)$$

para as funções porosidade e velocidades na região de transição.

Das Equações (24), (32), (42), (43) e (45) são obtidas as condições

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^- = \varepsilon_0 = \varepsilon(h(t), t) \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad \text{e} \quad V_2^+ = V_2^- = -u_0 \quad 0 < t \leq t_0 \quad (47)$$

sobre a onda de aceleração. Então, as Equações (18), (19), (25), (47) e a regra da cadeia estabelecem os resultados

$$\frac{dh}{dt} = w_0 \quad h = h(t) = w_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad x_0 = w_0 t_0 \quad (48)$$

para a altura da onda de aceleração.

É importante destacar que além da função comprimento  $A(\varepsilon)$  outra função comprimento denotada por  $N(\varepsilon)$  pode ser introduzida pela definição

$$2 \left( \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \xi) A(\xi) d\xi \right) N(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0) \left( \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi \right)^2 \quad (49)$$

que será útil mais adiante.

#### 3.3.3 Movimento da Interface Superior Descendente

Das Equações (24), (25), (34), (44) e (57) são obtidas as relações

$$\frac{dx}{dt} = -u_0 \quad 0 < t \leq t_0 \quad x = H - u_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (50)$$

para a altura da interface superior descendente no intervalo de tempo da curva de sedimentação livre, onde  $u_0$  é a velocidade de sedimentação livre. Conseqüentemente, das Equações (25) e (50)

$$(u_0 + w_0)t_0 = H \quad \text{ou} \quad (u_0 + w_0)x_0 = Hw_0 \quad (51)$$

para o ponto  $(x_0, t_0)$  de encontro da onda de aceleração com a interface superior descendente.

No intervalo da curva de transição, para o cálculo da altura da interface superior descendente, as Equações (25), (34), (45), (46) e (49) mostram que

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon)d\varepsilon = w_0t - x \quad \frac{dx}{dt} = w_0 - (u_0 + w_0)\frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^-} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad x(t_0) = x_0 \quad (52)$$

$$2\left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon)A(\varepsilon)d\varepsilon\right)N^- = (1 - \varepsilon_0)\left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon)d\varepsilon\right)^2 \quad N^- = N(\varepsilon^-) \quad (53)$$

onde  $\varepsilon^-$  é a porosidade no lado inferior da interface superior descendente

Das Equações (52) também pode ser obtida outra equação na forma

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon)A(\varepsilon)d\varepsilon = (1 - \varepsilon_0)(x + u_0t - H) \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (54)$$

a qual pode ser usada nas Equações (52) e (54) para a obtenção da relação

$$(w_0t - x)^2 = 2N^-(x + u_0t - H) \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (55)$$

envolvendo a altura da interface superior descendente no intervalo da curva de transição.

Usando as Equações (48), (51), (52), a Equação (55) pode ser reescrita na forma

$$w_0t = x + N^- \frac{u_0}{w_0} - \sqrt{\lambda} \quad \lambda \equiv \left(N^- \frac{u_0}{w_0}\right)^2 - 2N^-\left(H - \left(1 + \frac{u_0}{w_0}\right)x\right) \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (56)$$

Sendo  $t_m$  o instante tal que

$$\lambda(t_m) = 0 \quad x_m = x(t_m) \quad N_m = N^-(t_m) \quad (57)$$

segue das Equações (56) e (57) que

$$w_0t_m = x_m + N_m \frac{u_0}{w_0} \quad N_m \left(\frac{u_0}{w_0}\right)^2 = 2\left(H - \left(1 + \frac{u_0}{w_0}\right)x_m\right) \quad (58)$$

Com isso, da Equação (58) existe um ponto  $(x_m, t_m)$  tal que

$$w_0 = \frac{u_0x_m}{2(H-x_m)-u_0t_m} \quad (59)$$

para a velocidade da onda de aceleração.

### 3.3.4 Velocidade da Onda de Aceleração

Com base nas Equações (25) e (48), quando o ponto final da reta HP da Figura 1 está bem definido, a velocidade da onda de aceleração é dada por

$$w_0 = \frac{x_0}{t_0} \quad (60)$$

Quando não, é preciso outro caminho para o cálculo de  $w_0$  que possa ser usado em qualquer situação. Para isso, pode ser usada como ponto de partida a Equação (59) reescrita na forma

$$u_0 = \frac{2(H-x_m)w_0}{x_m+w_0t_m} \quad t_m > t_0 \quad x_m = x(t_m) \quad (61)$$

que motiva a introdução de duas funções velocidades  $u = u(x, t)$  e  $w = w(x, t)$  relatadas por

$$u = \frac{2(H-x)w}{x+wt} \quad 0 \leq t < \infty \quad (62)$$

sobre a curva  $x$  versus  $t$ , com  $u$  e  $w$  satisfazendo as condições

$$w(x_0, t_0) = w_0 \quad u(x_0, t_0) = u_0 \quad (63)$$

Além de  $u$  e  $w$ , seja  $v = v(x, t)$  outra função velocidade sobre a curva  $x$  versus  $t$ , definida pela relação

$$v = \frac{u_0 x}{H - u_0 t} \quad 0 \leq u_0 t < H \quad (64)$$

Dessa forma, das Equações (50) e (64) obtém-se que

$$v(x, t) = u_0 \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (65)$$

As Equações (60)-(65) formam uma estrutura que sugere um caminho para o cálculo de  $w_0$  através da interseção entre as funções  $u = u(x, t)$  e  $v = v(x, t)$ , o qual começa com a igualdade de  $u$  e  $v$  que fornece a relação

$$w = \frac{u_0 x^2}{2H(H-x) - (2H-x)u_0 t} \quad (66)$$

com a função  $w$  satisfazendo a condição expressa na Equação (63).

Com base na Equação (66), seja  $\bar{w} = \bar{w}(x, t)$  uma aproximação de  $w = w(x, t)$  definida por

$$\bar{w} = \frac{u_0 X^2}{2H(H-X) - (2H-X)u_0 t} \quad (67)$$

onde  $X = X(t)$  é uma aproximação de  $x = x(t)$  satisfazendo

$$X(0) = H \quad X(t_0) = x_0 = x(t_0) \quad \text{e} \quad \frac{dX}{dt}(t_0) = -\frac{2H-x_0}{3H-x_0} u_0 \quad (68)$$

Então, segue das Equações (48), (50), (60), (67) e (68) que

$$\bar{w}(x_0, t_0) = w_0 \quad \frac{d\bar{w}}{dt}(x_0, t_0) = 0 \quad (69)$$

Das Equações (69) o ponto  $(x_0, t_0)$  é um ponto crítico da função  $\bar{w}$ . Então, através do estudo de  $\bar{w}$  com denominador positivo,  $w_0$  é o valor mínimo positivo de  $\bar{w}$ .

O estudo da função  $w$  com denominador positivo também indica que  $w$  tem um mínimo positivo. Como  $\bar{w}$  é uma aproximação de  $w$  adota-se para o valor de  $w_0$ , de forma aproximada, o mínimo positivo de  $w$  obtido pela substituição de pontos experimentais  $x$  versus  $t$ , da interface superior descendente, na relação (66) com denominador positivo.

### 3.3.5 Movimento da Interface Inferior Ascendente

A interface inferior ascendente é fronteira comum entre a região de transição e a região de compactação. Das Equações (25), (45), (46) e (49) são obtidas as relações

$$V_2^+ = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^+} \quad 0 < t \leq t_c \quad (70)$$

$$\int_{\varepsilon^+}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - z \quad 0 \leq t \leq t_c \quad z(0) = 0 \quad (71)$$

$$2 \left( \int_{\varepsilon^+}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon \right) N^+ = (1 - \varepsilon_0) \left( \int_{\varepsilon^+}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon \right)^2 \quad N^+ = N(\varepsilon^+) \quad (72)$$

As Equações (01), (28)-(30) fornecem a igualdade

$$(1 - \varepsilon^+) \left( \frac{dz}{dt} - V_2^+ \right) = (1 - \varepsilon^-) \left( \frac{dz}{dt} - V_2^- \right) \quad 0 < t \leq t_c \quad (73)$$

através da interface inferior ascendente.

Das Equações (40), (70), (71) e (73) é determinada a relação

$$\int_{\varepsilon^+}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon = (1 - \varepsilon_0) \left( z + u_0 t - \left( \frac{1-\varepsilon_m}{1-\varepsilon_0} \right) z \right) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (74)$$

Com isso, as Equações (71), (72) e (74) mostram que

$$(w_0 t - z)^2 = 2N^+ \left( z + u_0 t - \left( \frac{1-\varepsilon_m}{1-\varepsilon_0} \right) z \right) \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (75)$$

Usando a Equação (71), a Equação (75) pode ser reescrita na forma

$$w_0 t = z + N^+ \frac{u_0}{w_0} - \sqrt{\gamma} \quad \gamma \equiv \left( N^+ \frac{u_0}{w_0} \right)^2 - 2N^+ \left( \left( \frac{1-\varepsilon_m}{1-\varepsilon_0} \right) z - \left( 1 + \frac{u_0}{w_0} \right) z \right) \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (76)$$

Sendo  $t_n$  o instante tal que

$$\gamma = 0 \quad z_n = z \quad N_n = N^+ \quad H_n = \left( \frac{1-\varepsilon_m}{1-\varepsilon_0} \right) z \quad \text{para } t = t_c \quad (77)$$

segue das Equações (76) e (77) que

$$w_0 t_n = z_n + N_n \frac{u_0}{w_0} \quad N_n \left( \frac{u_0}{w_0} \right)^2 = 2 \left( H_n - \left( 1 + \frac{u_0}{w_0} \right) z_n \right) \quad (78)$$

Então, das equações (78), existe um ponto  $(z_n, t_n)$  tal que

$$w_0 = \frac{u_0 z_n}{2(H_n - z_n) - u_0 t_n} \quad (79)$$

que é do mesmo tipo da Equação (59).

### 3.3.6 Condições para o ponto de encontro das interfaces

A primeira condição para o ponto  $(x_c, t_c)$  de encontro das interfaces está expressa nas Equações (25). Dessa forma, das Equações (25) e (37)-(39) é obtida a condição

$$\bar{\varepsilon}(t_c) = \varepsilon_m(t_c) \quad (80)$$

Usando como base a suavidade de cada porosidade média, são adotadas as seguintes condições:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}(t_c) = \frac{d\varepsilon_m}{dt}(t_c) \quad (81)$$

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} = -\frac{u_0}{2H - u_0 t} (1 - \varepsilon_m) \quad \text{para } t = t_c \quad (82)$$

Com isso, das Equações (38), (80)-(82) obtém-se que

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{u_0 x}{2H - u_0 t} \quad \text{para } t = t_c \quad (83)$$

### 3.3.7 Ponto de encontro das interfaces

As Equações (25), (38), (57), (58), (77) e (78) para  $t_n = t_m = t_c$  ( $z_n = x_m = x_c, H_n = H$ ) mostram que as Equações (59) e (79) são exatamente as mesmas. Isso motiva a introdução da função  $W = W(x, t)$  definida por

$$W = \frac{u_0 x}{2(H-x) - u_0 t} \quad (84)$$

com denominador positivo. Então, segue das Equações (83) e (84) a condição

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad \text{para } t = t_c \quad (85)$$

ou seja  $t_c$  é ponto crítico de  $W$ . Assim, com base nas Equações (84) e (85) e no estudo sobre a função  $W$ , o ponto  $(x_c, t_c)$  de encontro das interfaces é o ponto onde ocorre o mínimo positivo de  $W$ , obtido pela substituição de pontos experimentais  $x$  versus  $t$  da altura da interface superior descendente na Equação (84).

### 3.4. BASE DE INFORMAÇÕES

Dados experimentais, que podem ser coletados da literatura, de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta, determinam os parâmetros básicos  $u_0$ ,  $w_0$  e  $(x_c, t_c)$  por meio das Equações (50), (66) e (84).

Os parâmetros básicos, os dados experimentais da altura e a estrutura apresentada entre as Equações (01) e (85), com destaques para as Equações (17), (22)-(25), (36), (45)-(48), (50)-(56), (66), (70)-(76) e (84), estabelecem uma ordem de cálculo para outros parâmetros e funções. Eles formam uma base preliminar de informações para o estudo do movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade.

A base é uma fonte de informações para parâmetros envolvidos em equações propostas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão, como também para a função diferença de pressões arbitrárias. Como tudo depende dos parâmetros básicos, os primeiros resultados numéricos, detalhados a seguir, mostram o cálculo de tais parâmetros.

### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados foram obtidos com base na modelagem matemática juntamente com dados experimentais de altura versus tempo da interface superior descendente, coletados da literatura, onde a velocidade de sedimentação livre  $u_0$  foi obtida por meio da Equação (50).

Tabela 1 – Determinação do mínimo de  $w$  para uma suspensão aquosa de  $\text{CaCO}_3$  ( $H = 40$  cm,  $\varepsilon_0 = 0,960$ ,  $u_0 = 0,43$  cm min<sup>-1</sup>).

$t$ (min)	$x$ (cm)	$w$ (cm min <sup>-1</sup> )
8,50	35,00	2,24
20,10	30,00	1,05
33,30	25,00	0,65
52,50	18,00	0,39
56,00	17,00	0,38
59,50	16,00	0,39
64,10	15,00	0,46
68,60	14,00	0,63
73,50	13,00	1,71

Fonte: Elaboração própria com os dados de Schirmer [21]

A Tabela 1 mostra que o mínimo positivo de  $w$  é 0,38 cm min<sup>-1</sup>. Logo,  $w_0 = 0,38$  cm min<sup>-1</sup> e segue da Equação (51) que  $t_0 = 49,38$  min e  $x_0 = 18,77$  cm.

Tabela 2 – Valores de  $w_0$  para diversas suspensões

Suspensão aquosa	$w_0$ (cm min <sup>-1</sup> )	
	Equação (60)	Equação (66)
$\text{CaCO}_3$ : $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,977$ , $u_0 = 2,00$ cm min <sup>-1</sup>	2,00	2,14
$\text{CaO}$ : $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,972$ , $u_0 = 1,54$ cm min <sup>-1</sup>	0,58	0,62
Caulim: $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,913$ , $u_0 = 1,40$ cm min <sup>-1</sup>	0,74	0,70
$\text{CaSO}_4$ : $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,980$ , $u_0 = 2,75$ cm min <sup>-1</sup>	3,71	3,92
Borra de carbureto: $H = 30,7$ cm, $\varepsilon_0 = 0,970$ , $u_0 = 2,62$ cm min <sup>-1</sup>	1,48	1,50
Barita: $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,975$ , $u_0 = 1,52$ cm min <sup>-1</sup>	0,70	0,69

Fonte: Elaboração própria com os dados de Schirmer [21] e Massarani [22]

Usando suspensões dos trabalhos de Schirmer [21] e Massarani [22], nas quais  $w_0$  também pode ser determinada pela Equação (60), a Tabela 2 mostra comparação do valor de  $w_0$  dado pela Equação (60) com o valor de  $w_0$  determinado pelo mínimo positivo da função  $w$  expressa na Equação (66).

O ponto  $(x_c, t_c)$  de encontro das interfaces é o ponto onde ocorre o mínimo da função  $W$  definida pela Equação (84). Para ilustração do cálculo de tal ponto, foram elaboradas as Tabelas 3 e 4 com os dados experimentais de Tiller e d'Ávila [23].

*Tabela 3 – Ponto de encontro das interfaces para uma suspensão aquosa de Atapulgita*  
( $H = 40$  cm,  $\varepsilon_0 = 0,970$ ,  $u_0 = 0,18$  cm min<sup>-1</sup>)

<b>Suspensão Aquosa de Atapulgita</b>		
<b>t(min)</b>	<b>x(cm)</b>	<b>W(cm/min)</b>
117,75	20,00	0,191
137,68	17,50	0,156
163,04	15,00	0,131
196,67	12,50	0,115
216,67	11,88	0,124
233,33	11,56	0,140
250,00	11,25	0,162

*Fonte: Elaboração própria com os dados de Tiller e d'Ávila [23]*

*Tabela 4 – Ponto de encontro das interfaces para uma suspensão aquosa de microbarita*  
( $H = 42$  cm,  $\varepsilon_0 = 0,970$ ,  $u_0 = 4,23$  cm min<sup>-1</sup>).

<b>t(min)</b>	<b>x(cm)</b>	<b>W(cm min<sup>-1</sup>)</b>
7,63	10,00	1,33
7,85	8,75	1,11
8,18	7,50	0,92
8,56	6,25	0,75
8,87	5,63	0,68
10,00	5,00	0,67
10,74	4,74	0,69
12,00	4,30	0,74
14,00	3,60	0,89
16,00	2,89	1,16

*Fonte: Elaboração própria com os dados de Tiller e d'Ávila [23]*

De acordo com a Tabela 3 o valor mínimo de  $W$  é 0,115 cm min<sup>-1</sup> e ocorre no ponto  $t_c = 196,67$  min e  $x_c = 12,50$  cm, que é o mesmo valor do ponto experimental. Já na Tabela 4, como o mínimo de  $W$  é 0,67 cm min<sup>-1</sup>, o ponto de encontro das interfaces é dado por  $t_c = 10,00$  min e  $x_c = 5,00$  cm, sendo o valor experimental  $t_c = 8,87$  min e  $x_c = 5,63$  cm.

## 5. CONCLUSÃO

Soluções exatas de um sistema de equações do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade, incorporadas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, facilitam a determinação de equações para os movimentos da onda de aceleração e das interfaces, principalmente para a altura teórica da interface superior descendente que pode ser comparada com a altura experimental.

Ou seja, por força da modelagem matemática com base em soluções exatas, dados experimentais de altura versus tempo, coletados da literatura, da interface superior descendente do teste de proveta, na porosidade inicial  $\varepsilon_0$ , são suficientes para estabelecimento de funções

porosidade e velocidades em regiões do próprio teste, inclusive dos movimentos das interfaces e da onda de aceleração.

## 6. NOMENCLATURA

$\varepsilon$	Porosidade
$\rho_1$	Densidade do constituinte fluido
$\rho_2$	Densidade do constituinte sólido
$\rho_f$	Massa específica do fluido puro
$\rho_s$	Massa específica do sólido puro
$V_1$	Velocidade do constituinte fluido
$V_2$	Velocidade do constituinte sólido
$t$	Variável tempo
$y$	Coordenada espacial
$P_f$	Pressão do constituinte fluido
$P_s$	Pressão do constituinte sólido
$P_{sf}$	Diferença de pressões arbitrárias
$\varphi$	Função do tempo
$\phi$	Função da posição e do tempo
$a_1$	Aceleração do constituinte fluido
$a_2$	Aceleração do constituinte sólido
$\sigma_1$	Parte constitutiva do tensor tensão para o fluido
$\sigma_2$	Parte constitutiva do tensor tensão para o sólido
$m$	Parte constitutiva da força de interação
$g_1$	Força de campo sobre o fluido
$g_2$	Força de campo sobre o sólido
$H$	Altura inicial da suspensão na proveta
$x$	Altura da interface superior descendente
$h$	Altura da onda de aceleração
$z$	Altura da interface inferior ascendente
$t_0$	Instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
$t_c$	Instante de encontro das duas interfaces
$x_0$	Altura de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
$x_c$	Altura de encontro das duas interfaces
$\varepsilon_0$	Porosidade inicial
$u_0$	Velocidade de sedimentação livre
$w_0$	Velocidade da onda de aceleração
$A$	Função comprimento
$\gamma$	Constante com dimensão de velocidade
$B$	Função da porosidade
$Q$	Função da porosidade
$\psi$	Função da posição e do tempo
$U$	Velocidade de superfície em movimento
$\bar{\varepsilon}$	Porosidade média da suspensão
$\varepsilon_m$	Porosidade média na região de compactação
$g$	Aceleração da gravidade
$N$	Comprimento função da porosidade
$w$	Função velocidade
$W$	Função velocidade

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Cremasco MA. Operações unitárias em sistemas particulados e fluidomecânicos – 2ª edição. São Paulo. Blucher; 2014.
2. Hernando L, Omari A, Reungoat D. Experimental investigation of batch sedimentation of concentrated bidisperse suspensions. Powder Technology. 2015 May;(275) 273–279, doi: 10.1016/j.powtec.2015.01.069.

3. Koch M, Krammer G. Permeability distribution for filter media characterization in solid liquid filtration. *Powder Technology*. 2015 Feb;(271) 182–186, doi: 10.1016/j.powtec.2014.10.042.
4. O'Rourke PJ, Snider DM. A new blended acceleration model for the particle contact forces induced by an interstitial fluid in dense particle/fluid flows. *Powder Technology*. 2014 Apr;(256): 39-51, doi: 10.1016/j.powtec.2014.01.084
5. Silva AS, Jesus E. Queda transiente de uma partícula esférica em num fluido viscoso: transformação da equação íntegro-diferencial em uma equação diferencial. In: XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional; 2014 1-7; Natal(RN).
6. Tien C, Ramarao BV, Yasarla R. A blocking model of membrane filtration. *Chemical Engineering Science*. 2014 May;111: 421–431, doi: 10.1016/j.ces.2014.01.022.
7. Jalaal M, Ganji DD, Ahamadi G. Analytical investigation on acceleration motion of a vertically falling spherical particle in incompressible Newtonian media. *Advanced Powder Technology*. 2010 May;21(3): 298-304, doi: 10.1016/j.apt.2009.12.010.
8. Mollinger AM, Cornelissen EC, Van den brule BHAA. An unexpected phenomenon observed in particle settling: oscillating falling spheres. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1999 Sep;86(3): 389-393, doi: 10.1016/S0377-0257(98)00187-6.
9. Soares AA, Caramelo L, Andrade MAPM. Study of the motion of a vertically falling sphere in a viscous fluid. *European Journal of Physics*. 2012 Sep;33(5): 1053-1062, doi: 10.1088/0143-0807/33/5/1053.
10. Torabi M, Yaghoobi H. Novel solution for acceleration motion of a vertically falling spherical particle by HPM-Padé approximant. *Advanced Powder Technology*. 2011 Sep;22(5): 674-677, doi: 10.1016/j.apt.2011.02.013.
11. Torabi M, Yaghoobi H. Accurate solution for acceleration motion of a vertically falling spherical particle in incompressible newtonian media. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*. 2013 Feb;91(2): 376-381, doi: 10.1002/cjce.21641.
12. Ahmadi GA. Generalized continuum theory for multiphase suspensions flows. *International Journal of Engineering Science*. 1985 23(1): 1-25, doi: 10.1016/0020-7225(85)90012-6.
13. Green AE, Naghdi PM, Trapp JA. Thermodynamics of a continuum with internal constraints. *International Journal of Engineering Science*. 1970 Nov; 8(11): 891-908, doi: 10.1016/0020-7225(70)90069-8.
14. Srinivasan S, Bonito A, Rajagopal KR. Flow of a fluid through a porous solid due high pressure gradients. *Journal of Porous Media*. 2013 16(3): 193-203, doi: 10.1615/JPorMedia.v16.i3.20.
15. Silva AS, Jesus E. On arbitrary quantities in a porous media with incompressibility constraint. *International Review of Chemical Engineering*. 2013 Oct;5(6): 429-434.
16. Kynch GJ. A theory of sedimentation. *Transactions of the Faraday Society*. 1952 48: 166-176, doi: 10.1039/TF9524800166.
17. Tiller FM. Revision of Kynch sedimentation theory. *AIChE Journal*. 1981 Sep;27(5): 823-829, doi: 10.1002/aic.690270517.
18. Fitch B. Kynch theory and compression zones. *AIChE Journal*. 1983 Nov;29(6): 940-947, doi: 10.1002/aic.690290611.
19. Font R. Compression zone effect in batch sedimentation. *AIChE Journal*. 1988 Feb;34(2): 229-252, doi: 10.1002/aic.690340207.
20. Silva AS. Superfícies singulares e ondas de aceleração em misturas. [dissertação]. Rio de Janeiro (RJ): Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia/Universidade Federal do Rio de Janeiro; 1979.
21. Schirmer HP. Projeto de sedimentador III. [dissertação]. Rio de Janeiro (RJ): Universidade Federal do Rio de Janeiro; 1980.
22. Massarani G. *Fluidodinâmica em sistemas particulados – 2ª edição*. Rio de Janeiro. E-papers Serviços Editoriais; 2002. 152 p.
23. Tiller FM, D'Ávila JS. Zona de compressão em sedimentação. In: VIII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos; 1980, Curitiba.