



Formulação nodal aplicada a um problema de transporte bidimensional em geometria cartesiana

Nodal formulation applied to two-dimensional transport problem in Cartesian geometry

C. E. S. Ferreira¹; L. R. Emmendorfer¹; J. F. Prolo Filho²

¹Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional - PPGMC, Universidade Federal do Rio Grande, 96203-900, Rio Grande-RS, Brasil

²Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF, Universidade Federal do Rio Grande, 96203-900, Rio Grande-RS, Brasil

¹carlos.ferreira@furg.br; ²joaoprolo@furg.br

(Recebido em 15 de setembro de 2014; aceito em 16 de outubro de 2014)

Neste trabalho, uma formulação nodal é proposta para o tratamento de uma classe de problemas de transporte de nêutrons, em geometria cartesiana bidimensional. Pelo processo de integração, equações unidimensionais são obtidas, reescrevendo o modelo em termos de quantidades médias. A resolução das equações integradas é feita usando uma versão do método de Ordenadas Discretas Analítico (ADO), onde também são obtidas soluções explícitas, analíticas em termos das variáveis espaciais, através de um código de fácil implementação. Pode-se destacar também como vantagens desta formulação a versatilidade na escolha da quadratura e o baixo custo computacional, uma vez que esquemas iterativos não são necessários, tampouco a subdivisão do domínio em células. Para lidar com os termos do contorno que surgem no processo, utiliza-se aqui uma representação por constantes, de forma que as equações nas variáveis x e y são tratadas por um sistema acoplado. Resultados obtidos por esta formulação são apresentados, bem como alguns perfis de fluxo escalar.

Palavras-chave: Ordenadas discretas, métodos nodais, problema de transporte de nêutrons bidimensional.

In this paper, a nodal formulation is proposed for the treatment of a class of neutron transport problems in two-dimensional Cartesian geometry. By the integration process, one-dimensional equations are obtained, rewriting the model in terms of average quantities. The resolution of the integrated equations is made using a version of the Analytical Discrete Ordinate method (ADO), where also be obtained explicit solutions, analytical in terms of spatial variables, through an easy implementation code. It can also highlight as advantages of this formulation the versatility of the quadrature choice and the low computational cost, since iterative schemes are not needed either subdividing the domain in cells. To deal with the contour terms that arise in the process, is used here a representation by constants, so that the equations in the variables x and y are treated by a coupled system. Results obtained by this formulation are presented, as well as some profiles of scalar flux.

Keywords: Discrete-ordinates, nodal methods, two-dimensional neutron transport problem.

1. INTRODUÇÃO

A Equação de Transporte, por sua grande aplicabilidade em diversos problemas realísticos, principalmente em geometrias multidimensionais, tem motivado a comunidade científica a investir cada vez mais no desenvolvimento de novas formulações para seu tratamento [1-4].

Mesmo com a existência de uma série de códigos bem estabelecidos e formulações dedicadas à sua resolução [5, 6], a maioria é baseada em esquemas numéricos, o que encoraja o estudo e o desenvolvimento de novas técnicas, de caráter analítico, que possibilitem um ganho de precisão ou de eficiência computacional [7, 8].

Para resolução de problemas multidimensionais envolvendo transporte de partículas, as formulações que mais tem se destacado são as baseadas nos Métodos Nodais [9-11], principalmente pelo seu desempenho quando associados à malhas grossas. Estas formulações, que geralmente requerem a subdivisão do domínio em células, fazem uso de esquemas iterativos para relacionar determinadas quantidades médias definidas no processo. Estas quantidades médias, obtidas do processo usual de integração, reduzem a complexidade do modelo, mas provocam o surgimento de incógnitas adicionais associadas aos fluxos angulares nos contornos.

A representação adequada destes termos de fuga transversal, que normalmente é feita através de equações auxiliares, assume um papel importante no desenvolvimento do método, pois afeta diretamente a precisão dos resultados [11-13].

Nos últimos anos, com o uso dos esquemas nodais, tem sido possível escrever de forma explícita as soluções das equações unidimensionais integradas, obtidas do problema de transporte bidimensional escrito em ordenadas discretas [2, 14]. Inspirada nas versões clássica [15] e analítica [16] do método de ordenadas discretas, a formulação apresentada aqui fornece soluções analíticas em termos das variáveis espaciais a um custo computacional extremamente baixo, por meio de uma técnica de fácil implementação. Quando combinada aos métodos nodais, esquemas iterativos passam a não ser mais necessários, tão pouco a subdivisão do domínio em células ou o uso de métodos de interpolação. Aqui, usou-se a Quadratura Simétrica de Nível (quadratura S_N) [17] para geração dos resultados, contudo outras quadraturas também podem ser aplicadas sem precisar fazer qualquer mudança no método.

Para lidar com os termos de fuga transversal, utilizaram-se aproximações constantes, que passaram a ser tratadas como termos de fonte das equações nodais. A solução particular adotada será um caso particular da proposta por Barros e Larsen [11], e a determinação de todas as incógnitas será feita por meio de um sistema linear que acopla os problemas em x e y [2, 3].

Este trabalho tem caráter preliminar e visa melhorar o entendimento a respeito dos métodos nodais e do seu uso aliado ao método de ordenadas discretas. Para isto, buscou-se trabalhar com uma classe de problemas bidimensionais de teoria de transporte ditos clássicos na literatura, onde foi possível gerar uma série de resultados.

2. FORMULAÇÃO

Considerando a aproximação em ordenadas discretas da equação de transporte de nêutrons bidimensional em regime estacionário, aplicada a um meio homogêneo retangular R , tal que $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$, com espalhamento isotrópico, sem fonte interna e um grupo de energia, escrita na forma [17]

$$\mu_i \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\mathbf{r}, \Omega_i) + \eta_i \frac{\partial}{\partial y} \Psi(\mathbf{r}, \Omega_i) + \sigma_t \Psi(\mathbf{r}, \Omega_i) = \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^M w_k \Psi(\mathbf{r}, \Omega_k), \quad (1)$$

com $i = 1, \dots, M$. O vetor $\mathbf{r} = (x, y)$ representa a coordenada espacial, as componentes $\Omega_i = (\mu_i, \eta_i)$ e w_i correspondem, respectivamente, às direções e pesos utilizados para discretização do termo integral de espalhamento, definidos de acordo com a quadratura S_N [17], como mostrado na Figura 1, com $M = N(N + 2)/2$ representando o número total de direções utilizadas na quadratura. Os parâmetros σ_t e σ_s são, respectivamente, as seções de choque macroscópica total e de espalhamento.

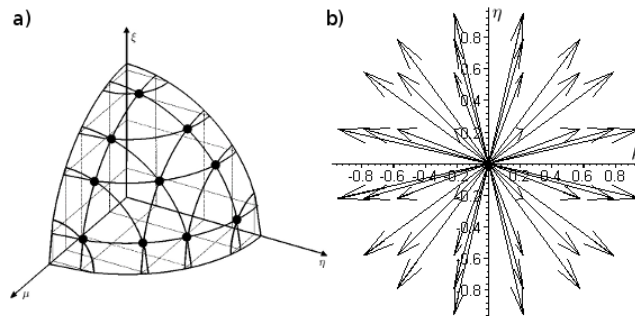


Figura 1: Exemplo de discretização das direções de espalhamento, usando $N=8$, no sistema tridimensional “a)”, e bidimensional “b)”.

Seguindo a metodologia usual dos métodos nodais, faz-se a integração da Equação (1) em termos das variáveis espaciais para obter as versões unidimensionais da equação de transporte. Dessa forma, multiplica-se a Equação (1) por $1/b$ e integra-se para todo $y \in [0, b]$, resultando na equação dependente de x

$$\mu_i \frac{d}{dx} \Psi_y(x, \Omega_i) + \sigma_t \Psi_y(x, \Omega_i) = Q_y(x, \Omega_i) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^M w_k \Psi_y(x, \Omega_k), \quad (2)$$

com $i = 1, \dots, M$, onde

$$\Psi_y(x, \Omega_i) = \frac{1}{b} \int_0^b \Psi(\mathbf{r}, \Omega_i) dy \quad (3)$$

e

$$Q_y(x, \Omega_i) = -\frac{\eta_i}{b} [\Psi(x, b, \Omega_i) - \Psi(x, 0, \Omega_i)]. \quad (4)$$

De forma equivalente, para obter o sistema de equações em termos da variável y , multiplica-se a Equação (1) por $1/a$ e integra-se para todo $x \in [0, a]$, resultando em

$$\eta_i \frac{d}{dy} \Psi_x(y, \Omega_i) + \sigma_t \Psi_x(y, \Omega_i) = Q_x(y, \Omega_i) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{k=1}^M w_k \Psi_x(y, \Omega_k), \quad (5)$$

para $i = 1, \dots, M$, onde

$$\Psi_x(y, \Omega_i) = \frac{1}{a} \int_0^a \Psi(\mathbf{r}, \Omega_i) dx \quad (6)$$

e

$$Q_x(y, \Omega_i) = -\frac{\mu_i}{a} [\Psi(a, y, \Omega_i) - \Psi(0, y, \Omega_i)]. \quad (7)$$

Importante salientar que, diferentes de outros trabalhos baseados no método de Ordenadas Discretas Analítico (ADO) [14, 18], a formulação proposta aqui não faz a separação das equações (em x e y) de acordo com o ordenamento das direções. Isto faz com que seja possível não só utilizar outros tipos de quadratura (além da quadratura S_N), mas também reduz a complexidade do acoplamento dos problemas unidimensionais, como será visto mais adiante.

Chama-se a atenção também que ao fazer a integração da Equação (1) em função das variáveis x e y , termos referentes aos contornos passam a ser incorporados às equações unidimensionais sendo, como pode ser visto nas Equações (4) e (7), escritos como termos fonte. Contudo, estas condições de contorno são prescritas apenas nas direções de incidência às faces da região R ($x = 0, x = a, y = 0, y = b$), e desconhecidas nas demais direções. Para estes fluxos não-incidentes, como será visto a seguir, equações auxiliares serão necessárias para sua representação.

3. SOLUÇÃO EM ORDENADAS DISCRETAS

Como parte do processo, seguem-se os passos da formulação descrita nas referências [12, 18], onde propõe-se que a solução homogênea do problema definido pela Equação (2) seja da forma

$$\Psi_y(x, \Omega_i) = \Phi_y(\nu, \Omega_i) e^{-x/\nu}, \quad (8)$$

para $i=1, \dots, M$, onde as constantes de separação ν estão associadas às soluções elementares $\Phi_y(\nu, \Omega_i)$. Dessa forma, substitui-se a Equação (8) na versão homogênea da Equação (2), resultando no sistema algébrico

$$\frac{1}{\nu} \Phi_y(\nu, \Omega_i) = \frac{\sigma_t}{\mu_i} \Phi_y(\nu, \Omega_i) - \frac{\sigma_s}{4\mu_i} \sum_{k=1}^M w_k \Phi_y(\nu, \Omega_k), \quad (9)$$

que pode ser expresso matricialmente como

$$\lambda_y \Phi_y = [\mathbf{D}_y - \mathbf{A}_y] \Phi_y, \quad (10)$$

com

$$\lambda_y = \frac{1}{\nu}, \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_y = \text{diag} \left\{ \left(\frac{\sigma_t}{\mu_1} \right), \left(\frac{\sigma_t}{\mu_2} \right), \dots, \left(\frac{\sigma_t}{\mu_M} \right) \right\} \quad (12)$$

e

$$A_y(i, k) = \frac{\sigma_s w_k}{4\mu_i}, \quad (13)$$

para $i=1, \dots, M$ e $k=1, \dots, M$.

Resolvido o problema de autovalores e obtido os pares $\{\lambda_{y,j}, \Phi_{y,j}\}$, para $j=1, \dots, M$, as constantes de separação ν_j são determinadas através da Equação (11). No processo, verificou-se que as constantes de separação ocorrem aos pares, $\{\pm\nu_j\}$, fazendo com que a solução homogênea da Equação (2), na sua forma explícita, seja expressa como

$$\Psi_y^h(x, \Omega_i) = \sum_{j=1}^{M/2} A_j \Phi_y(\nu_j, \Omega_i) e^{-x/\nu_j} + A_{j+M/2} \Phi_y(\nu_{j+M/2}, \Omega_i) e^{-(a-x)/\nu_j}, \quad (14)$$

para $i=1, \dots, M$.

De forma equivalente para o outro problema integrado, é proposto que a solução homogênea da Equação (5) seja da forma

$$\Psi_x(y, \Omega_i) = \Phi_x(\gamma, \Omega_i) e^{-y/\gamma} \quad (15)$$

e, seguindo os mesmos passos descritos para o problema integrado em y , obtém-se um sistema matricial similar ao representado pela Equação (10), no qual são obtidos os pares $\{\lambda_{x,j}, \Phi_{x,j}\}$, para $j = 1, \dots, M$. Através da relação

$$\lambda_x = \frac{1}{\gamma} \quad (16)$$

são encontradas as constantes de separação γ_j , que também ocorrem aos pares $\{\pm\gamma_j\}$. Assim, a solução homogênea da Equação (5) também pode ser expressa explicitamente como

$$\Psi_x^h(y, \Omega_i) = \sum_{j=1}^{M/2} B_j \Phi_x(\gamma_j, \Omega_i) e^{-y/\gamma_j} + B_{j+M/2} \Phi_x(\gamma_{j+M/2}, \Omega_i) e^{-(b-y)/\gamma_j}, \quad (17)$$

para $i = 1, \dots, M$.

Repare que tanto os coeficientes A_j quanto os coeficientes B_j ainda precisam ser determinados.

4. SOLUÇÕES PARTICULARES, EQUAÇÕES AUXILIARES E ACOPLAMENTO

Uma vez que as versões integradas da Equação (1) possuem termos fonte não-homogêneos, as soluções gerais dos problemas integrados em y e x serão da forma

$$\Psi_y(x, \Omega_i) = \Psi_y^h(x, \Omega_i) + \Psi_y^p(x, \Omega_i), \quad (18)$$

$$\Psi_x(y, \Omega_i) = \Psi_x^h(y, \Omega_i) + \Psi_x^p(y, \Omega_i), \quad (19)$$

para $i = 1, \dots, M$, onde as soluções homogêneas dos problemas integrados em y e x são dados, respectivamente pelas Equações (14) e (17), e as soluções particulares dependerão dos termos de fonte indicados nas Equações (4) e (7).

Com relação aos termos de fonte, buscou-se neste trabalho utilizar expressões mais simples para representar os fluxos dos contornos. Para isto, segundo [3], serão usadas

$$\Psi(x, 0, \Omega_i) = C_i, \quad (20)$$

$$\Psi(x, b, \Omega_i) = D_i, \quad (21)$$

$$\Psi(0, y, \Omega_i) = E_i, \quad (22)$$

$$\Psi(a, y, \Omega_i) = F_i, \quad (23)$$

para $i = 1, \dots, M$.

Definidas estas equações auxiliares, as soluções particulares utilizadas aqui serão inspiradas no trabalho de Barros e Larsen [11] e escritas na forma

$$\Psi_y^p(x, \Omega_i) = \frac{\sigma_s}{4a\sigma_t(\sigma_t - \sigma_s)} \sum_{j=1}^M \eta_j w_j [E_j - F_j] + \frac{\eta_i}{a\sigma_t} [E_i - F_i], \quad (24)$$

$$\Psi_x^p(y, \Omega_i) = \frac{\sigma_s}{4b\sigma_t(\sigma_t - \sigma_s)} \sum_{j=1}^M \mu_j w_j [C_j - D_j] + \frac{\mu_i}{b\sigma_t} [C_i - D_i]. \quad (25)$$

Contudo, note que tanto as soluções homogêneas, quanto as particulares dos problemas integrados possuem incógnitas a serem determinadas. Isto será feito através de um sistema linear que acopla os dois problemas nodais, relacionando entre si as soluções gerais dos problemas integrados, as equações auxiliares propostas para representação dos contornos e as condições de contorno de incidência.

De fato, computando as incógnitas das aproximações dos fluxos angulares nos contornos e as das soluções homogêneas, tem-se um total de $6M$ coeficientes a serem determinados. Das $6M$ equações necessárias para se ter um sistema *bem posto*, as primeiras $2M$ são obtidas da relação que há entre as Equações (18) e (19) e as versões integradas das condições de contorno incidentes. As outras $4M$ equações provêm da relação que deve haver entre a Equação (18), para $x=0$ e $x=a$, e a Equação (19), para $y=0$ e $y=b$, com a versão integrada das aproximações propostas para os fluxos nas fronteiras: Equações (20) à (23).

Resolvido este sistema linear, as soluções dos problemas nodais unidimensionais estão completamente estabelecidas e certas quantidades de interesse podem ser avaliadas. Neste ponto é importante salientar que a utilização de um sistema único de direções para os dois problemas nodais torna o método mais fácil de ser implementado, sem criar maiores dificuldades no momento de acoplar os problemas unidimensionais.

5. RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nesta formulação, considera-se o caso ilustrado pela Figura 2,

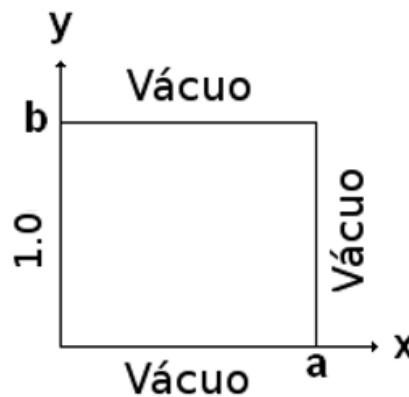


Figura 2: Geometria do problema alvo do estudo.

caracterizado por uma região retangular de dimensões $[0,1] \times [0,1]$ ($a = b = 1.0\text{cm}$), com três das faces isoladas (condições de vácuo) e uma face recebendo uma carga de nêutrons de $1.0\text{n/cm} \cdot \text{s}$. A seção de choque macroscópica total, σ_t , será fixada em 1.0cm^{-1} e diferentes seções de choque macroscópica de espalhamento, σ_s , serão consideradas. Também será estudado o fenômeno com relação ao número de direções utilizadas na quadratura S_N .

As quantidades de interesse avaliadas neste trabalho correspondem ao fluxo escalar de nêutrons que, para as equações nodais unidimensionais, são dados pelas relações

$$\phi(x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^M w_k \Psi_y(x, \Omega_k), \quad (26)$$

$$\phi(y) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^M w_k \Psi_x(y, \Omega_k), \quad (27)$$

e, para expressar o fluxo bidimensional propriamente dito, usou-se a expressão

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}[\phi(x) + \phi(y)]. \quad (28)$$

A partir dos resultados apresentados, é possível observar nas Tabelas 1 e 2 a convergência dos valores de fluxo conforme o parâmetro N aumenta, garantindo entre dois e três dígitos significativos de concordância. Isto se deve ao fato de que aumentando a ordem da quadratura, maior é o número de direções em que a partícula pode migrar dentro da região R e maior é o número de termos utilizados na quadratura, garantindo uma melhor representação do termo integral. Graficamente, a Figura 3 ilustra a convergência dos resultados para os fluxos integrados, uma vez que conforme o valor de N aumenta, maior é a tendência das curvas ficarem mais próximas do perfil de maior N .

Nas Tabelas 3, 4 e Figura 4, são apresentados os fluxos escalares unidimensionais conforme o parâmetro σ_s aumenta, mostrando que para meios mais espalhadores (maiores σ_s), os nêutrons tem uma maior facilidade de atravessar o domínio, o que pode ser fisicamente comparado ao fenômeno de transferência de calor em materiais condutores.

Tabela 1: Fluxo escalar $\phi(x)$ para $\sigma_s = 0.65$ e diferentes valores de N .

N	x						
	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
6	0.576664	0.458758	0.282671	0.161489	0.077342	0.020806	0.001506
8	0.577557	0.455103	0.278864	0.160673	0.078948	0.023819	0.005131
12	0.578152	0.450492	0.275702	0.161023	0.081065	0.026396	0.008035
16	0.578354	0.447616	0.274575	0.161716	0.082198	0.027343	0.009099
20	0.578445	0.445686	0.274192	0.162296	0.082828	0.027739	0.009579

Tabela 2: Fluxo escalar $\phi(y)$ para $\sigma_s = 0.65$ e diferentes valores de N .

N	x						
	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
6	0.142130	0.176180	0.217320	0.230029	0.217320	0.176180	0.142130
8	0.139796	0.175505	0.216985	0.229424	0.216985	0.175505	0.139796
12	0.138090	0.175642	0.216626	0.228403	0.216626	0.175642	0.138090
16	0.137475	0.176105	0.216351	0.227624	0.216351	0.176105	0.137475
20	0.137191	0.176540	0.216131	0.227074	0.216131	0.176540	0.137191

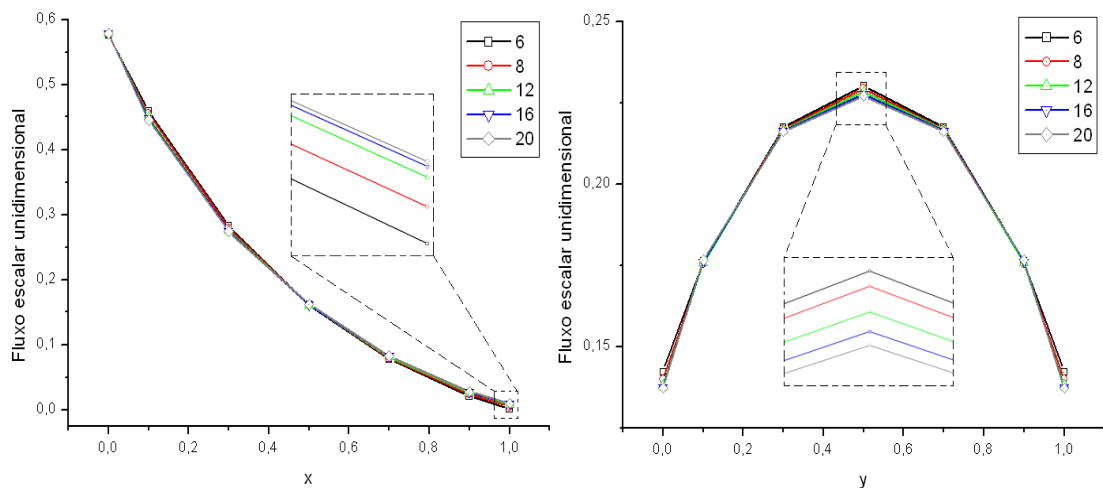


Figura 3: Perfis de fluxo escalar $\phi(x)$ e $\phi(y)$, para $\sigma_s = 0.65$ e diferentes valores de N .

Tabela 3: Fluxo escalar $\phi(x)$, para $N = 20$ e diferentes valores para σ_s .

σ_s	x						
	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
0.1	0.509828	0.363825	0.203613	0.114824	0.057109	0.017389	0.002479
0.3	0.531577	0.389558	0.225104	0.128884	0.064508	0.020187	0.004341
0.5	0.556738	0.419586	0.251006	0.146297	0.073930	0.023969	0.006935
0.7	0.586330	0.455207	0.282797	0.168329	0.086241	0.029230	0.010637
0.9	0.621860	0.498344	0.322713	0.196944	0.102837	0.036801	0.016084

Tabela 4: Fluxo escalar $\phi(y)$, para $N = 20$ e diferentes valores para σ_s .

σ_s	x						
	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
0.1	0.106780	0.137428	0.165024	0.172007	0.165024	0.137428	0.106780
0.3	0.116027	0.149318	0.180486	0.188626	0.180486	0.149318	0.116027
0.5	0.127180	0.163662	0.199230	0.208822	0.199230	0.163662	0.127180
0.7	0.140917	0.181333	0.222436	0.233891	0.222436	0.181333	0.140917
0.9	0.158291	0.203687	0.251935	0.265840	0.251935	0.203687	0.158291

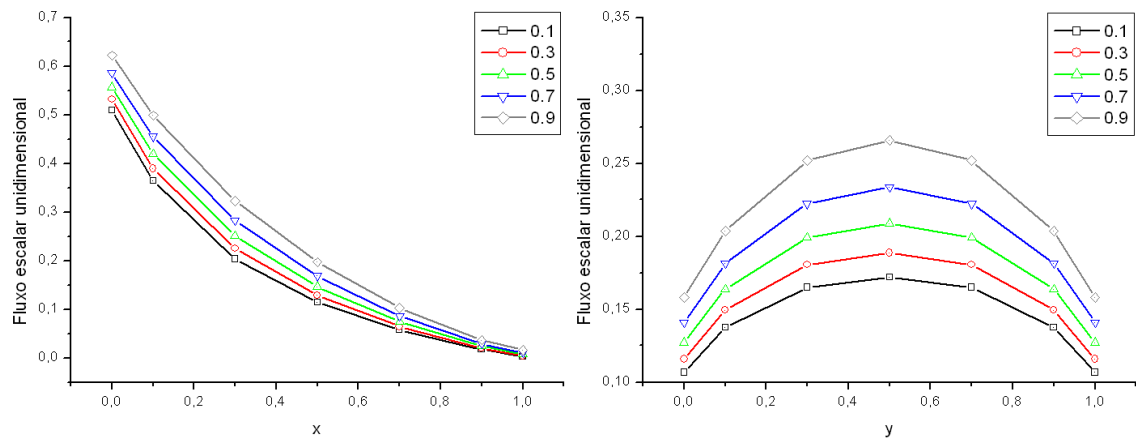


Figura 4: Perfis de fluxo escalar $\phi(x)$ e $\phi(y)$, para $N = 20$ e diferentes valores de σ_s .

Com relação à Figura 5 (e Tabela 5), buscou-se mostrar como seria o comportamento do fluxo escalar bidimensional propriamente dito, obtidos através da Equação (28), e a sua relação com os perfis de fluxo escalar unidimensionais gerados através das Equações (26) e (27).

Tabela 5: Fluxo escalar $\phi(x, y)$ para $N = 20$, com $\sigma_s = 0.65$.

y	x						
	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
0.0	0.357818	0.377492	0.397288	0.402759	0.397288	0.377492	0.357818
0.1	0.291439	0.311113	0.330908	0.336380	0.330908	0.311113	0.291439
0.3	0.205691	0.225366	0.245161	0.250633	0.245161	0.225366	0.205691
0.5	0.149744	0.169418	0.189213	0.194685	0.189213	0.169418	0.149744
0.7	0.110010	0.129684	0.149479	0.154951	0.149479	0.129684	0.110010
0.9	0.082465	0.102139	0.121935	0.127406	0.121935	0.102139	0.082465
1.0	0.073385	0.093059	0.112855	0.118326	0.112855	0.093059	0.073385

Apesar de considerar que a formulação proposta aqui ainda precisa ser aprimorada, este trabalho mostra que esta variação do método ADO, combinada aos métodos nodais, é uma boa alternativa para a resolução de problemas de transporte bidimensionais. A construção de soluções analíticas em termos das variáveis espaciais contribui drasticamente no sentido de minimizar o custo computacional, uma vez que elimina a necessidade de esquemas iterativos, bem como a subdivisão do domínio em células, evitando inclusive a utilização de métodos de interpolação. O fato da formulação não estar restrita apenas a um tipo de quadratura também é um ponto positivo, uma vez que a própria quadratura S_N possui uma limitação quanto a quantidade de direções.

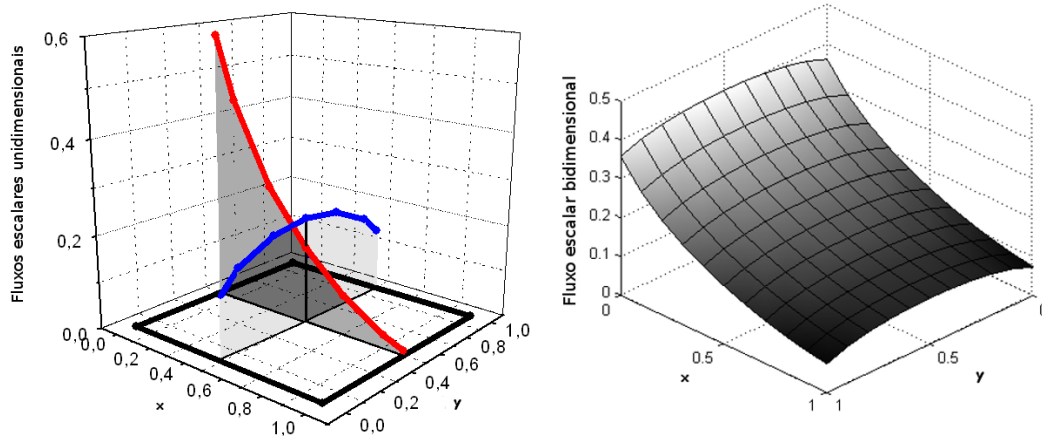


Figura 5: Perfis de fluxo escalar $\phi(x)$, $\phi(y)$ e $\phi(x, y)$, para $N = 20$ e $\sigma_s = 0.65$.

6. AGRADECIMENTOS

Agradecimento a CAPES, pela bolsa do Programa de Demanda Social (DS), ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Rio Grande e ao Professor Leonardo R. Emmendorfer.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Al-Basheer AK, Sjoden, GE, Ghita M. Critical discretization issues in 3-D S_N simulations relevant to dosimetry and medical physics. Nuclear Technology 2010; 169(3):252-262.
2. Sanchez R. Prospects in deterministic three-dimensional whole-core transport calculations. Nuclear Engineering and Technology 2012 March; 44(2):113-150, doi:10.5516/NET.01.2012.501.
3. Tres A, Picoloto CB, Prolo Filho JF, da Cunha RD, Barichello LB. Explicit formulation of a nodal transport method for discrete ordinates calculations in two-dimensional fixed-source problems. Kerntechnik 2014 April; 79(2):155-162, doi:10.3139/124.110413.
4. Wagner JC, Mosher SW, Evans TM, Peplow DE, Turner JA. Hybrid and parallel domain-decomposition methods development to enable Monte Carlo for reactor analyses. Progress in Nuclear Science and Technology 2011 June; 2(1):815-820.
5. Rosa M, Warsa JS, Perks M. A cellwise block-gauss-seidel iterative method for multigroup S_N transport on a hybrid parallel computer architecture. Nuclear Science and Engineering 2013 July; 174(3):209-226, doi:dx.doi.org/10.13182/NSE12-57.
6. Zhang D, Rahnama F. An efficient hybrid stochastic/deterministic coarse mesh neutron transport method. Annals of Nuclear Energy 2012 March; 41(1):1-11, doi:10.1016/j.anucene.2011.09.024.
7. Menezes WA, Alvez Filho H, Barros RC, Moraes CS, Dominguez DS. Analytical spatial reconstruction scheme for the coarse-mesh solutions generated by the constant spectral nodal method for monoenergetic discrete ordinates transport calculations in X,Y geometry fission chain reacting systems. Annals of Nuclear Energy 2013 March; 53(1):274-279, doi:10.1016/j.anucene.2012.08.029.
8. Williams MMR. Exact solutions of the two-dimensional cell problem. Nuclear Science and Engineering 2013 February; 173(2):182-196, doi:dx.doi.org/10.13182/NSE12-11.

9. Azmy YY. Comparison of three approximations to the linear-linear nodal transport method in weighted diamond-difference form. *Nuclear Science and Engineering* 1988 Novembre; 100(3):190-200, doi: dx.doi.org/10.13182/NSE88-5.
10. Badruzzaman A. An efficient algorithm for nodal-transport solutions in multidimensional geometry. *Nuclear Science and Engineering* 1985 March; 89(3):281-290.
11. Barros RC, Larsen EW. A spectral nodal method for one-group X,Y-geometry discrete ordinates problems. *Nuclear Science and Engineering* 1992 May; 111(1):34-45.
12. Prolo Filho JF. Abordagens espectronodais para modelos multidimensionais em transporte de partículas [tese de doutorado]. Porto Alegre (RS): Universidade Federal do Rio Grande do Sul; 2011. 79p.
13. Zabadal JR, Vilhena MT, Barichello LB. An analytical solution for the two-dimensional discrete ordinate problem in a convex domain. *Progress in Nuclear Energy* 1997; 31(3):225-228, doi:10.1016/0149-1970(95)00097-6.
14. Barichello LB, Cabrera LC, Prolo Filho JF. An analytical approach for a nodal scheme of two-dimensional neutron transport problems. *Annals of Nuclear Energy* 2011 June; 38(6):1310-1317, doi:10.1016/j.anucene.2011.02.004.
15. Chandrasekhar S. *Radiative Transfer*, London: Oxford University Press, 1950. 393p.
16. Barichello LB, Siewert CE. A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 1999 August; 62(6):665-675, doi:10.1016/S0022-4073(98)00096-X.
17. Lewis EE, Miller W F. *Computational Methods of Neutron Transport*, New York: John Wiley & Sons, 1984. 414p.
18. Prolo Filho JF, Barichello LB. An analytical discrete ordinates solution for a nodal model of a two-dimensional neutron transport problem. *Proceedings of the International Conference on Mathematics & Computational Methods Applied to Nuclear Science & Engineering-M&C2013*; 2013 May 5-9; Sun Valley, ID, American Nuclear Society, vol. 1, p. 2350-2360.